В.А. Далингер

Метод перебора в решении математических задач

Москва
ИЛЕКСА
2021

УДК 373.167.1:522.2
ББК 22.13я721
Д152

Далингер В.А.

Д152 Метод перебора в решении математических задач. — М.: Илекса, 2021. — 182 с.: ил.

ISBN 978-5-89237-490-3

Данное учебное пособие написано на основе опыта работы автора с самыми различными по уровню подготовки аудиториями школьников и студентов. Оно предназначено для учащихся и учителей математики школ, гимназий, колледжей, а также для студентов и преподавателей педвузов. Его основная цель состоит в том, чтобы на многочисленных примерах из различных областей арифметики и алгебры показать одну из сторон математического творчества — перебор вариантов как средство решения некоторых типов задач, от простых до самых сложных. Пособие может быть использовано для подготовки к ЕГЭ, олимпиадам различного уровня и на занятиях дополнительного образования.

УДК 373.167.1:522.2
ББК 22.13я721

ISBN 978-5-89237-490-3

Содержание

Введение

Метод перебора, видимо, — самый древний и самый простой метод решения задач, в которых искомая величина принимает только целочисленные значения. Наряду с анализом, синтезом, аналогией он является важным инструментом интеллектуальной деятельности.

Этот метод очень удобен, когда количество возможных вариантов невелико. Такой перебор легко осуществить вручную. Когда же вариантов сотни и тысячи, то перебор следует «поручить» компьютеру. Известны серьезные задачи, которые математики не могут решить иначе, чем методом перебора. Такой, например, была знаменитая «задача о четырех красках», решенная лишь при помощи компьютера с очень хитрым перебором. Однако перебор подходит не для всех случаев. Так, например, перебором невозможно точно решить такую простейшую геометрическую задачу: «Найти на данной прямой точку, наименее удаленную от заданной точки вне прямой». Но методом перебора можно решить такую задачу: «Доказать, что среди двузначных чисел есть только два числа, которые равны утроенному произведению их цифр». Переберем все двузначные числа от 10 до 99 и покажем, что требованию задачи удовлетворяют только два числа: 15 и 24.

Рассмотрим еще пример.

Задача 1. На складе стоят 5 станков массой соответственно 1500 кг, 1020 кг, 800 кг, 750 кг и 600 кг. Требуется увезти часть из них на машине грузоподъемностью 3 тонны, загрузив ее максимально, но не перегрузив. Какие станки надо погрузить в машину?

Решение.

Предположим, что мы решили не брать самый тяжелый станок. Тогда масса остальных станков 1020 + 800 +750 + 600 = 3170 кг, что больше трех тонн. Значит, придется оставить еще какой-нибудь станок. Мы захватим самый большой вес, если оставим самый легкий станок — в 600 кг. Надо, конечно, еще проверить, сможет ли трех-

тонка увезти оставшиеся станки: 1020 + 800 + 750 = 2570 кг < 3 т. Итак: если не брать самый тяжелый станок, то мы увезем, самое большее, 2570 кг. Пусть теперь мы погрузили на машину станок в 1500 кг; тогда в машине еще остается места на 1500 кг. Уложиться в эти 1500 кг можно, взяв только один станок, что даст нам, самое большее, 1020 кг (а всего в грузовике будет 2520 кг), либо взять два станка, что даст, самое большее, 800 + 600 = 1400 кг, а всего на грузовике будет 2900 кг.

Сравнивая все варианты, мы видим, что последний — наилучший. Итак, надо погрузить станки массой 1500 кг, 800 кг, и 600 кг.

Подобный прямой перебор не всегда возможен. Чаще приходится применять его в сочетании с другими методами. Вот пример.

Задача 2. Найдите все натуральные трехзначные числа, каждое из которых обладает следующими двумя свойствами:

- первая цифра в 3 раза меньше последней его цифры;
- сумма самого числа с числом, получающимся из него перестановкой второй и третьей его цифр, делится на 8 без остатка.

Решение.

Пусть x — цифра сотен, y — цифра десятков искомого числа. Тогда цифра его единиц равна $3x$. Очевидно, $3x \le 9$, откуда $x \le 3$. Нулем первая цифра числа быть не может. Значит, x не может равняться ничему иному, кроме 1, 2 и 3. Эти три возможности мы рассмотрим по отдельности, но сначала запишем второе условие, обозначая тремя точками $\vdots$ выражение «делится на»:

$$((100x + 10y + 3x) + (100x + 30x + y)) \vdots 8,$$

т.е.

$$(200x + 33x + 11y) \vdots 8.$$

Мы нарочно оставили $200x$ и $33x$ отдельными слагаемыми. Так легче заметить, что $200x$ можно отбросить (так как $200 \vdots 8$) и записать это условие так:

$$(33x + 11y) \vdots 8,$$

или

$$11(3x + y) \vdots 8.$$

Для этого необходимо и достаточно, чтобы $3x + y$ делилось на 8. Теперь приступим к перебору, который вполне осуществим, так как состоит всего из трех случаев.

1) $x = 1$. Тогда $3 + y \vdots 8$. Это будет при $y = 5$.

2) $x = 2$. Тогда $6 + y \vdots 8$. Это будет при $y = 2$.

3) $x = 3$. Тогда $9 + y \vdots 8$. Это будет при $y = 7$.

Итак, задача имеет три ответа: 153, 226, 379.

Рассмотрим задачу коммивояжера.

Задача 3. Как объехать несколько городов, между каждыми двумя из которых имеется железнодорожное сообщение, затратив как можно меньше времени, если задан город, в котором начинается и кончается путь?

Уже для 5 городов количество вариантов равно 24, для 6 городов их 120, для 7 — 720, для 10 — 362 880.

Видим, сколь сложно осуществить прямой перебор. Заметим, что единственный недостаток метода перебора — его трудоемкость при большом числе вариантов. Однако этого недостатка часто можно избежать, если правильно организовать перебор. Великолепной иллюстрацией преимущества размышлений над «голым перебором» могут служить замечательные работы лауреата Нобелевской премии академика Л.В. Канторовича по линейному программированию. Их смысл в том, что отсеиваются огромные количества вариантов и лишь сравнительно немногие оставшиеся дают программисту решение задач за считанные минуты. Поэтому, имея заведомую возможность найти решение задачи полным перебором, следует «поломать голову», чтобы хоть чуть-чуть ограничить область перебора.

Проиллюстрируем сказанное на двух задачах.

Задача 4. Доказать, что среди двузначных чисел есть только одно, которое равно удвоенному произведению его цифр.

Доказательство.

В соответствии с условием задачи мы должны найти двузначное число $\overline{ab}$, для которого выполняется равенство $\overline{ab} = 2 \cdot a \cdot b$, т.е. $10 \cdot a + b = 2 \cdot a \cdot b$. Выразим из последнего равенства a:

$$a = \frac{b}{2 \cdot b - 10} = \frac{b}{2(b-5)}.$$

Учитывая, что b — это цифра, можно записать: $0 \le b \le 9$, $b \in N_0$, где N_0 — множество целых неотрицательных чисел. Из равенства $a = \dfrac{b}{2(b-5)}$, следует, что $b - 5 \ge 1$. Таким образом, из системы

$$\begin{cases} 0 \le b \le 9, \\ b - 5 \ge 1 \end{cases}$$

следует: $6 \le b \le 9$.

Хотя перебор всех натуральных значений b, удовлетворяющих неравенству $6 \le b \le 9$, несложен, можно еще сузить область перебора, для этого заметим, что b должно быть четным. Тогда следует рассмотреть лишь $b = 6$ и $b = 8$. Итак, проведенные рассуждения позволили сузить область перебора от 90 до 10 случаев, затем до 4 и окончательно до 2 случаев. При $b = 6$ цифрой a будет 3, а числом будет 36. Это число удовлетворяет требованию задачи. При $b = 8$ значение a будет дробным числом, но так как a — это цифра, то a дробным быть не может.

Итак, мы получили, что лишь одно двузначное число 36 равно удвоенному произведению его цифр.

Задача 5. Известно, что $\sqrt[3]{****3}$ есть натуральное число. Найдите его.

Первое, что приходит в голову, — это перебирать пятизначные числа, оканчивающиеся на 3, и смотреть, нет ли среди них точных кубов: 10 003, 10 013, 10 023, ... Но когда еще мы доберемся до 99 993, да и как узнать, является данное число кубом или нет?

Лучше будем возводить число в куб и посмотрим, какие из получившихся чисел будут пятизначными и оканчивающимися на 3. Получим $1^3 = 1$, $2^3 = 8$, $3^3 = 27$, $4^3 = 64$, $5^3 = 125$, $6^3 = 216$, $7^3 = 343$, $8^3 = 512$, $9^3 = 729$, $10^3 = 1000$.

Так дело тоже не пойдет. Зачем нам нужны кубы маленьких чисел? Посмотрим, чему равно наименьшее число x, куб которого является пятизначным числом. Оно не меньше, чем $\sqrt[3]{10000} = 10\sqrt[3]{10}$, но $\sqrt[3]{10}$ больше 2, так как $2^3 = 8$; поэтому x больше 20. Оценим искомое число сверху, т.е. посмотрим, какого числа оно не может превышать. Такое число, очевидно, равно $\sqrt[3]{100000} = 10\sqrt[3]{100}$. Но $\sqrt[3]{100}$ меньше 5, так как $5^3 = 125$. Значит, нужно перебирать числа от 21 до 49.

Посмотрим, не поможет ли нам сократить перебор то, что число под радикалом оканчивается на 3. Изучим выписанные нами кубы первых десяти натуральных чисел. Из них на 3 оканчивается лишь куб 7. Если теперь немножко подумать, то нетрудно сообразить, что куб натурального числа будет оканчиваться на 3 в том и только в том случае, если само число оканчивается на 7.

Теперь нам осталось для перебора лишь три числа: 27, 37 и 47. $27^3 = 19\,683$, $37^3 = 50\,653$, $47^3 = 103\,823$, но последнее число уже шестизначное, поэтому остаются лишь числа 27 и 37.

Для сокращения вариантов перебора созданы специальные методы, которые составляют новую область математики — целочисленное программирование.

С методом перебора связан метод полной индукции, с помощью которого доказывают теоремы, решают задачи на доказательство.

Доказательство теорем методом полной индукции строится следующим образом: перебираются все возможные случаи, к каждому из которых применяют либо синтетический метод, либо метод противоречия.

Примером может служить доказательство теоремы об измерении вписанного угла половиной дуги, на которую он опирается. Доказывая эту теорему методом полной индукции, мы должны рассмотреть все три возможных случая: центр окружности лежит на стороне вписанного угла, центр окружности лежит между сторонами вписанного угла, центр окружности лежит вне вписанного угла.

Итак, суть метода полной индукции заключается в том, что общее утверждение доказывается по отдельности в каждом конкретном случае из числа тех, которые могут представиться.

Более глубокому пониманию сути метода полной индукции будет способствовать решение таких задач, которые приведены ниже:

1. «Найдите трехзначное число, которое равно квадрату двузначного и кубу однозначного числа».

Выпишем все кубы однозначных чисел ($1^3, 2^3, 3^3, \ldots, 9^3$) и выберем те из них, которые, являясь трехзначными числами, равны квадрату двухзначного числа. Такое число единственное: $729 = 27^2 = 9^3$.

Заметим, что задача решена методом полной индукции.

2. «Доказать, что решениями неравенства $x^{18} - x^{15} + x^2 - x + 1 > 0$ будут все действительные числа».

Доказательство.

Разобьем числовую прямую на три промежутка:

а) $x \le 0$; б) $0 < x < 1$; в) $x \ge 1$.

Докажем, что на каждом из этих промежутков неравенство выполняется.

Если $x \le 0$, то первые четыре слагаемых, стоящие в левой части неравенства, неотрицательны, а 1 больше нуля, а, значит, их сумма больше нуля.

При $0 < x < 1$, группируя члены, стоящие в левой части неравенства, следующим образом: $x^{18} + (x^2 - x^{15}) + (1 - x)$, мы будем иметь, что все слагаемые положительны, а, значит, их сумма больше нуля.

Если $x \ge 1$, то группировку слагаемых проведем следующим образом: $(x^{18} - x^{15}) + (x^2 - x) + 1$.

При $x \ge 1$ первые два слагаемых неотрицательны, а единица положительна, и, значит, вся сумма больше нуля.

Заметим, что речь в этой задаче шла о бесконечном числе случаев ($x \in R$) и перебрать их все не представляется возможным. Для того чтобы использовать метод полной индукции, мы разбили бесконечное число случаев на конечное число вариантов (здесь основой разбиения служит смена знака выражения), а затем каждый вариант рассматриваем в отдельности.

Но описанная выше технология использования метода полной индукции на случай бесконечного числа вариантов применима далеко не всегда. Метод полной индукции имеет в математике ограниченное применение. Абсолютное большинство математических предложений охватывает бесконечное множество частных вариантов, и провести проверку истинности этих предложений в таком случае путем перебора или путем разбиения этого бесконечного множества на конечное число подмножеств мы не можем. Тогда во многих случаях обращаются к особому методу доказательства — методу математической индукции. Суть этого метода доказательства состоит в следующем.

Пусть требуется доказать справедливость некоторого утверждения для любого натурального числа n. Чтобы доказать это утверждение, проверяют его справедливость для $n = 1$. Затем доказывают, что при любом натуральном значении k из справедливости рассматриваемого утверждения при $n = k$ вытекает его справедли-

вость при $n = k + 1$. Тогда утверждение считается доказанным для всех $n \in N$.

Сформулируем принцип математической индукции: «Если предложение, в формулировку которого входит натуральное число n, истинно при $n = 1$ и из его истинности при $n = k$ (где $k \in N$) следует, что оно истинно и при $n = k + 1$, то оно истинно при всех натуральных значениях n».

Когда принцип математической индукции (его иногда называют аксиомой арифметики натуральных чисел) используют для доказательства теоремы $(\forall n \in N)\ (A(n))$, то фактически строится такой силлогизм:

Большая посылка: принцип математической индукции.

Малая посылка: $A(n)$, $n \in N$: $A(1)$ — истинно; $(A(k) \Rightarrow A(k+1))$ — истинно.

Вывод: $A(n)$ — истинно для любого натурального n.

Когда нужно доказывать справедливость некоторого утверждения не для всех натуральных чисел, а лишь для $n \geq p$, где p — фиксированное натуральное число, то в этом случае пользуются принципом математической индукции, сформулированным следующим образом: «Если предложение истинно при $n = p$ и из его истинности при $n = k$, где $k \geq p$, следует, что оно истинно и при $n = k + 1$, то предложение истинно для любого $n \geq p$».

Докажем методом математической индукции истинность равенства

$$1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2. \qquad (*)$$

1) При $n = 2$ (мы взяли базу индукции для $n = 2$, а не для $n = 1$, ибо доказывается формула для суммирования) доказываемое равенство принимает вид $1 + 3 = 2^2$, которое истинно. Итак, равенство (*) истинно при $n = 2$.

2) Предположим, что равенство (*) истинно при $n = k$, т. е. справедливо равенство

$$1 + 3 + 5 + ... + (2k - 1) = k^2.$$

Докажем, что тогда равенство (*) истинно и при $n = k + 1$, т. е. справедливо равенство

$$1 + 3 + 5 + ... + (2k - 1) + (2k + 1) = (k + 1)^2.$$

Преобразуем левую часть последнего равенства:

$$1 + 3 + 5 + ... + (2k - 1) + (2k + 1) =$$
$$= (1 + 3 + 5 + ... + (2k - 1)) + (2k + 1).$$

Но по предположению индукции сумма, стоящая в первой скобке последнего равенства, равна k^2. Значит, вся сумма равна

$$k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2.$$

Итак, имеем

$$1 + 3 + 5 + ... + (2k - 1) + (2k + 1) = (k + 1)^2.$$

Тем самым по принципу математической индукции истинность равенства (*) доказана для любых $n \in N$.

На случай бесконечного числа возможных вариантов в математике используется еще один метод доказательства. Его суть состоит в следующем. Математическое утверждение доказывается для конечного числа случаев, и делается вывод о невыполнимости этого утверждения для остальных случаев, которых бесконечное число. Назовем этот метод доказательства методом бесконечных исключений. Рассмотрим примеры, иллюстрирующие этот метод доказательства.

1. Доказать, что если длины сторон прямоугольника выражены натуральными числами, причем числовое значение его периметра равно числовому значению его площади, то таких прямоугольников может быть только два.

Доказательство.

Обозначим длины смежных сторон прямоугольника через x и y. По условию $xy = 2 \cdot x + 2 \cdot y$. Из уравнения имеем $y = \dfrac{2x}{x-2}$. Выделим целую часть у полученного выражения:

$$y = \frac{2x}{x-2} = \frac{2x - 4 + 4}{x-2} = 2 + \frac{4}{x-2}.$$

Так как по условию x и y — натуральные числа, то сумма $2 + \dfrac{4}{x-2}$ может быть натуральным числом лишь при $x = 3$, $x = 4$, $x = 6$. При всех остальных числах эта сумма не может быть натуральным числом. Соответствующие значения для y будут $y = 6$, $y = 4$, $y = 3$. Очевидно, что различных решений два: прямоугольник со сторонами 3 и 6 и квадрат со стороной 4.

2. Доказать, что дробь $\frac{4n-5}{2n-1}$ при целых значениях n будет натуральным числом лишь при $n = -1$, $n = 0$, $n = 2$.

Доказательство.

Преобразуем дробь, выделив целую часть:

$$\frac{4n-5}{2n-1} = \frac{4n-2+2-5}{2n-1} = \frac{4n-2-3}{2n-1} = 2 - \frac{3}{2n-1}.$$

Очевидно, что лишь при $n = -1$, $n = 0$, $n = 2$ дробь $\frac{3}{2n-1}$ будет целым числом, а сама разность $2 - \frac{3}{2n-1}$ будет натуральным числом. Для всех остальных целых значений n дробь $\frac{4n-5}{2n-1}$ не будет натуральным числом.

3. Доказать, что при целых значениях n дробь $\frac{n^2-n+3}{n+1}$ будет целым числом лишь при $n = -6$, $n = -2$, $n = 0$, $n = 4$.

Доказательство.

Преобразуем записанную дробь следующим образом:

$$\frac{n^2-n+3}{n+1} = \frac{n^2+n-n-n+3}{n+1} = \frac{(n^2+n)-2n+3}{n+1} = n - \frac{2n-3}{n+1} =$$

$$= n - \frac{2n+2-2-3}{n+1} = n - 2 + \frac{5}{n+1}.$$

Легко видеть, что полученное выражение будет иметь целое значение лишь при $n = -6$, $n = -2$, $n = 0$, $n = 4$.

Метод перебора, хотя и не требует больших знаний в области математики, имеет значительную дидактическую ценность. Она состоит в том, что при переборе ученик уподобляется эмпирику. Уже в младших классах учащиеся сталкиваются с разбором всевозможных случаев при решении ряда задач. Используя перебор, ученик ведет себя как обычный экспериментатор (физик, инженер,…), наблюдает, сопоставляет факты и на основании частных выводов делает те или иные общие заключения. В процессе этих наблюдений обобщается реально-практический опыт учащегося. Именно в этом прежде всего состоит познавательная ценность задач на перебор. При этом в данной работе термин «перебор» используется двояко.

Во-первых, в смысле разбора всех возможных случаев. Например, имеются 9 палочек разной длины от 1 см до 9 см. Сколько из них можно составить квадратов, длина стороны каждого из которых равна 9 см (способы составления квадрата считаются различными, если используются разные палочки и не обязательно все)? Во-вторых, слово «перебор» используется в смысле термина «индукция», но не как заменитель термина «полная математическая индукция». Наблюдая за частностями, ученики часто подмечают общее правило, формулу. Например, предлагается задача: каким свойством обладают суммы первых последовательных нечетных натуральных чисел? Как вспоминал академик А.Н. Колмогоров, «Радость математического открытия я познал рано, подметив в возрасте 5–6 лет закономерность:

$$1 = 1^2$$
$$1 + 3 = 2^2$$
$$1 + 3 + 5 = 3^2$$
$$1 + 3 + 5 + 7 = 4^2$$

и так далее».

При решении задач методом перебора (в первом смысле) нужно рассматривать все возможные случаи, из них выделить те, которые удовлетворяют условиям задачи, показать, что других вариантов быть не может. В связи с этим возникает задача выбора такой системы перебора, которая давала бы полную уверенность в том, что рассмотрены все случаи. В этом состоят особенности и трудности метода перебора. Но, даже не владея началами комбинаторики, часто можно сделать перебор вполне обозримым и однозначным. Так, в задаче с палочками можно искусственно ввести «палочку» длины 0 и из чисел 0, 1, …, 9 сконструировать пары с суммой 9:

$$(0; 9); (1; 8); (2; 7); (3; 6); (4; 5).$$

Оставляя одну из пар в стороне (5 случаев), из оставшихся четырех пар палочек строим нужный квадрат. Однако прежде чем к этому способу решения прийти, школьники рисовали несколько конкретных квадратов.

Метод перебора не случайно завоевал популярность в школьных учебниках, математических олимпиадах, в задачах на приемных экзаменах в вузах. Методом перебора доказываются некоторые формулы и теоремы, много задач (особенно из теории чисел) имеют

переборное решение, подтверждающее или опровергающее ту или иную гипотезу. Навряд ли можно назвать разделы школьного курса математики, в которых в процессе изучения не использовались бы элементы перебора. Например, требуется узнать, при каких значениях аргумента данная рациональная функция принимает только положительные значения. Чаще всего мы перебираем знаки данной дроби на промежутках, на которые числовая прямая разбивается всеми нулями числителя и знаменателя, т.е. используем так называемый метод интервалов. Аналогичные действия наблюдаются при решении уравнений или неравенств, когда неизвестное содержится под знаком абсолютной величины. А взять задачи с параметром… .

Перебор как метод индуктивного рассуждения может привести к опровержению какого-то факта, может и подкрепить его истинность. Многочисленные тому примеры мы можем найти, например, в работе [43]. Так, П. Ферма предполагал, что числа вида $f_n = 2^{2^n} + 1$ ($n \in N$) простые. Это верно для $n = 1, 2, 3, 4,$ однако Л. Эйлер, непревзойденный вычислитель своего времени, нашел, что число f_5 составное:

$$f_5 = 4\,294\,967\,297 = 641 \cdot 6\,700\,417.$$

В геометрии известна теорема Л. Эйлера (1758 г.): у выпуклого многогранника число вершин минус число ребер плюс число граней равно двум; символически В – Р + Г = 2. Как Эйлер пришел к этой формуле? На основе подсчета указанных величин для конкретных фигур (куб, призмы, пирамиды, …), т.е. с помощью перебора конкретных вариантов. Мастер индуктивного исследования, Эйлер сделал многие важные открытия (в теории бесконечных рядов, в теории чисел и т.д.) с помощью индукции.

Перебор как индуктивное исследование может быть в математике полезным в том смысле, что частные наблюдения не только приводят к общему результату, но и могут подсказать его доказательство. Например, пусть L_n обозначает число частей, на которые плоскость делится n прямыми в общем положении. Разбор частных случаев подводит к рекуррентной формуле $L_{n+1} = L_n + (n+1)$, а отсюда легко установить в явном виде L_n как функцию от n.

В обучении математике трудно переоценить роль переборного метода как разновидности индукции. Перебирая конкретные част-

ные случаи какой-нибудь формулы или теоремы, мы начинаем ее осознавать и понимать. Убедившись в том, что формула или теорема верна в нескольких частных случаях, мы приобретаем сильные доводы в ее пользу. Подобное обсуждение может служить иллюстрацией некоторых важных общих идей. Индуктивная фаза преодолевает наше первоначальное сомнение и дает нам сильную уверенность в формуле, теореме. Как писал Д. Пойа, «В целом кажется естественным и разумным, что индуктивная фаза предшествует доказательной фазе. Сначала догадайтесь, потом докажите» [43, с. 105]. И далее: «Так обычно делается открытие. У учителя математики есть много возможностей продемонстрировать роль догадки в открытии и, таким образом, способствовать развитию у учащегося склада ума, который имеет фундаментальное важное значение для любой исследовательской работы. Мне хочется, чтобы вы позаботились о своих учащихся в этом отношении. Старайтесь научить их догадываться» [42, с. 308].

Кому адресовано данное пособие? Прежде всего учащимся, начиная с шестого класса. Но преподаватели и студенты могут извлечь кое-что полезное, например, материал для занятий математического кружка, для подготовки учащихся к олимпиаде, для написания доклада или реферата. Большинство предлагаемых задач так или иначе связано с числами. Поэтому читатель должен иметь основополагающие представления: что такое система счисления, какие числа простые и составные, знать основные признаки делимости и разложение на простые множители (основная теорема арифметики), НОД и НОК. В предлагаемых задачах мы не используем такие тонкие факты, как малую теорему Ферма или китайскую теорему об остатках. Предложенная тематика хорошо пересекается с комбинаторикой, но мы сочли разумным ограничиться минимумом задач, в которых она применяется. Что касается алгебры, то читатель должен иметь навыки разложения многочлена невысоких степеней (второй или третьей) на линейные множители. Знание комплексных чисел предполагается только в разделе 2.2.

По своему происхождению предлагаемый здесь материал весьма разнообразен. Мы черпали его, например, из классического достояния отечественной популярной математики. Ведь сколько школьников приобщились к «царице наук», читая, скажем, книжку Я.И. Перельмана [40], источники [21, 24, 26, 37, 38] и их перевод-

ные аналоги. Использовались также материалы журнала «Квант» и многочисленные сборники задач различных математических олимпиад школьников, например [14]. Не остались в стороне и некоторые методические разработки для учащихся и учителей, преподавателей и студентов педвузов [3, 11, 20, 29, 32, 48, 54] и др. Список использованной литературы вовсе не претендует на полноту; любой мало-мальски заинтересованный читатель мог бы его дополнить.

В решения задач часто вкраплены пояснения, имеющие целью напомнить необходимые понятия, формулы, правила; иногда тут же при решении указываются возможные расширения, новые применения, источник для более углубленного знакомства с материалом.

Автором подмечено, что некоторые студенты — «компьютерщики», идя в ногу с тенденцией внедрения в учебный процесс современных информационно-коммуникационных технологий, ряд предлагаемых задач на перебор успешно решали на компьютере, например, в среде Mathcad, уклоняясь от решения с помощью математических средств. Часть таких подходов в качестве новинки мы не без удовольствия здесь приводим.

Автор старался обойтись минимумом обозначений. Чаще всего было использовано: N — множество натуральных чисел, Z — множество целых чисел и R — множество всех действительных чисел.

Глава 1. **ПЕРЕБОР В АРИФМЕТИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ**

Начнем со следующего наводящего примера.

Пример 1.1. Известно, что сумма квадратов двух целых чисел делится на 3. Доказать, что каждое из этих чисел делится на 3.

Решение. Представим данные числа в виде $3k + c$, $3k_1 + c_1$, где $c, c_1 \in \{0, 1, 2\}$. Тогда сумма их квадратов представится в виде

$$3(3k^2 + 3k_1^2 + 2kc + 2k_1c_1) + (c^2 + c_1^2).$$

По условию задачи $c^2 + c_1^2$ кратно трем. Перебираем все возможные комбинации значений c и c_1 (их 9 пар). Видим, что лишь при $c = c_1 = 0$ сумма квадратов остатков делится на 3.

Переход от целых чисел к их остаткам от деления на фиксированное число m является основным приемом в задачах на делимость. При этом используется простое правило: чтобы найти остаток от деления на m суммы или произведения двух (или нескольких) целых чисел, достаточно проделать те же операции с остатками и найти, какой остаток дает нужный результат.

Покажем, например, что результат рассмотренного примера остается верным, если в его условии заменить 3 на 7. Действительно, возведя в квадрат целые числа от 0 до 6, можно убедиться, что остатки, которые дают квадраты целых чисел при делении на 7, — это только 0, 1, 2 и 4. Видим, что никакие два из этих четырех чисел, кроме пары нулей, в сумме не дают числа, делящегося на 7. Поэтому сумма квадратов двух целых чисел делится на 7 тогда и только тогда, когда каждое число делится на 7.

Пример 1.2. Числа $l^3 - 3$ ни при каком целом l не делятся на 7. Доказать.

Решение. Действительно, любое целое число l можно представить в виде $l = 7m + r$, $r \in \{0, 1, \ldots, 6\}$. Тогда

$$l^3 = (7m)^3 + 3 \cdot (7m)^2 r + 3 \cdot (7m) r^2 + r^3.$$

Отсюда $l^3 - 3 = 7M + r^3 - 3$, где M — некоторое целое число (выпишите его). Но простым перебором убеждаемся, что из всевозможных разностей $r^3 - 3$ ни одна не делится на 7.

Пример 1.3.

а) Докажите, что число $n^2 + 1$ $(n \in N)$ не делится на 3.

б) Решите в целых числах уравнение $3x^2 + 8 = y^2$.

В решении задачи а) представьте n в виде $n = 3k + r$, $r \in \{0, 1, 2\}$. Перебором остатков проверьте неделимость на 3 числа $n^2 + 1$.

В случае б) прибавьте к обеим частям уравнения по 1. Если бы уравнение имело решение, то слева увидим число, кратное трем, а справа, согласно а), не кратное трем. Противоречие приводит к ответу: решений нет.

Исследование на делимость одной из частей равенства $A = B$ на данное целое число m часто приводит к успеху в решении задачи. Вот некоторые примеры.

Пример 1.4. Найдите все двузначные числа, квадрат которых равен кубу суммы их цифр.

Решение. Пусть $10a + b$ — искомое число (a, b — его цифры, $a \neq 0$). Так как $10a + b = 9a + (a + b)$, то

$$(10a + b)^2 = 81a^2 + 18a(a + b) + (a + b)^2 = (a + b)^3.$$

Отсюда

$$81a^2 + 18a(a + b) = (a + b)^2(a + b - 1).$$

Величина слева делится на 9, поэтому $a + b = 9$ или $a + b = 18$ или $a + b - 1 = 9$ или $a + b - 1 = 0$. Осталось выполнить перебор, который мы опускаем.

Ответ: 27.

Пример 1.5. В равенстве ЛИК × ЛИК = БУБЛИК вместо каждой буквы надо поставить определенную цифру так, чтобы получилось верное равенство. При этом различным буквам соответствуют различные цифры.

Решение. Из обеих частей исходного равенства вычтем ЛИК. Получим ЛИК × (ЛИК – 1) = БУБ × 1000. Заметим, что $1000 = 125 \cdot 8$. Множители ЛИК, ЛИК – 1 взаимно простые. Нечетный из них должен делиться на 125. Если предположить, что ЛИК четное, то ЛИК – 1 может принимать лишь значения 125, 375, 625, 875. Перебором находим, что тогда ЛИК = 376. Если предположить, что ЛИК

нечетное, то перебор даст ЛИК = 625. Проверка ($376 \cdot 376 = 141\,376$, $625 \cdot 625 = 390\,625$) показывает, что ЛИК = 625 следует отсеять. Иначе БУБ = 390 — противоречие, так как букве Б должна соответствовать только одна цифра.

Пример 1.6. Восстановите в примере на умножение ** · ** = = 1*1 цифры, обозначенные звездочками. Найдите все решения [12, задача 168].

Решение. Очевидно, первые цифры множителей равны вторым их цифрам.

Произведение двух цифр может оканчиваться единицей только в следующих трех случаях: $1 \cdot 1$, $3 \cdot 7$ и $9 \cdot 9$. Переберем все три возможности: $11 \cdot 11 = 121$ подходит, $13 \cdot 17 = 221$ не подходит, $19 \cdot 19$ тем более.

Ответ: $11 \cdot 11 = 121$.

Пример 1.7. Восстановите запись, указав все решения: [12, задача 170].

$$\begin{array}{r} \times\ \begin{array}{r} 1* \\ ** \end{array} \\ \hline +\begin{array}{r} **1 \\ ** \end{array} \\ \hline ***1 \end{array}$$

Решение. Сначала восстановим часть умножения, получающуюся при умножении первого множителя на вторую цифру второго множителя:

$$1* \cdot * = **1.$$

Рассмотрим все возможности (перебор):

$$11 \cdot 1 = 11,\ 17 \cdot 3 = 51,\ 13 \cdot 7 = 91,\ 19 \cdot 9 = 171.$$

Подходит только последняя. Теперь запись принимает такой вид:

$$\begin{array}{r} \times\ \begin{array}{r} 19 \\ *9 \end{array} \\ \hline +\begin{array}{r} *71 \\ ** \end{array} \\ \hline ***1 \end{array}$$

Как видно из сложения, первая цифра второго слагаемого равна 8 или 9. Тогда первая цифра второго множителя может быть равна

только 5, поскольку произведение 19 · 4 = 76 слишком мало, а произведение 19 · 6 = 114 слишком велико для этого.

Ответ: 19 · 59 = 1121.

Пример 1.8. Восстановите запись:

$$\begin{array}{r} \text{КРОСС} \\ +\ \text{КРОСС} \\ \hline \text{СПОРТ} \end{array},$$

где каждая буква означает цифру, причем одинаковые буквы означают одинаковые цифры, разные буквы — разные цифры. Найдите все решения.

Это пример числового ребуса.

Решение. Обратим внимание на два последних столбца. Так как в них при сложении одних и тех же цифр С и С получаются разные цифры, то в пятом столбце должно получиться в сумме не менее 10, откуда С не меньше 5.

Присмотримся к третьему столбцу: когда сумма О + О может оканчиваться той же самой цифрой 0? Такое возможно лишь тогда, когда О равно нулю или девяти. Но О равной нулю быть не может, поскольку из четвертого столбца в третий переносится 1; значит, О равно девяти.

Вернемся к цифре С. С учетом предыдущего справедливо неравенство $5 \le C \le 8$. Переберем все четыре возможных значения С (проделайте это самостоятельно).

Ответ: 35 977 + 35 977 = 71 954.

Пример 1.9. Найдите все натуральные числа, оканчивающиеся на 1981, которые после вычеркивания четырех последних цифр уменьшаются в целое число раз.

Решение. Искомые числа имеют вид $x \cdot 10\,000 + 1981$. После указанного вычеркивания остается x. По условию $x \cdot 10\,000 + 1981 = nx$ ($n \in N$). Значит, 1981 делится на x. Осталось перебрать делители числа 1981. Ими являются числа 1, 7, 283, 1981. Искомые числа соответственно: 11 981, 71 981, 2 831 981, 19 811 981.

В задачах типа «Найти число с наперед заданным свойством» иногда к цели приводит выяснение характера искомого числа, например, его четность или нечетность — в этом и будет состоять перебор.

Пример 1.10. Решите уравнение $x^2 - y^2 = 6$ в целых числах.

Решение. Из данного уравнения видно, что числа должны быть одновременно либо четными, либо оба нечетными. Анализ случаев однако показывает, что в обоих нет решений. Например, допустим, что x, y одновременно четны: $x = 2x_1$, $y = 2y_1$ при целых x_1, y_1. Придем к уравнению $2x_1^2 - 2y_1^2 = 3$, но ведь оно не имеет целых решений (почему?). Случай, когда оба числа нечетные, читатель без труда разберет самостоятельно.

Пример 1.11.

а) Можно ли число $A = 101\,010$ представить в виде разности квадратов двух целых чисел?

б) Разрешимо ли в целых числах уравнение $2x^2 - 5y^2 = 7$? [50, задачи 8, 9] .

Решение. а) Предположим, что можно: $A = x^2 - y^2$. Тогда числа x, y должны быть либо оба четные, либо оба нечетные. Перебираем эти возможности.

В первом случае правая часть равенства делится на 4, левая не делится, так как $A = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 37$. Во втором случае пусть $x = 2k + 1$, $y = 2l + 1$, тогда $x^2 - y^2 = 4(k^2 - l^2 + k - l)$ кратно четырем — противоречивая ситуация повторилась.

Ответ: нельзя.

б) Переберите несколько целочисленных пар (x; y) и каждый раз будете наблюдать отсутствие равенства. Пробы наталкивают на гипотезу: решений нет. Как это доказать? Используем старый испытанный метод «от противного»: пусть какое-то решение (x; y) существует. Тогда число y должно быть нечетным: $y = 2y_1 + 1$. Уравнение приводится к виду

$$x^2 - 10y_1(y_1 + 1) = 6.$$

Отсюда следует, что число x четное: $x = 2x_1$. Но тогда

$$4x_1^2 - 10y_1(y_1 + 1) = 6, \; 2x_1^2 - 5y_1(y_1 + 1) = 3.$$

Последнее равенство противоречивое, так как левая часть четная как разность двух четных чисел.

Пример 1.12. Найдите четырехзначное число N, являющееся полным квадратом, если равны его первые две цифры и две последние.

Решение. По условию задачи

$$N = 1000x + 100x + 10y + y = 11(100x + y) = t^2.$$

В последнем равенстве правая часть делится на 11. Но тогда и само число t делится на 11. Следовательно, $100x + y = 99x + (x + y)$ делится на 11. Отсюда имеем: $x + y$ кратно 11. Перебор значений $1 \le x \le 9, 0 \le y \le 9$ с $x + y = 11$ приведет к искомому $N = 7744 = 88^2$.

Пример 1.13. Найдите целочисленные решения уравнений

а) $x + y = x^2 - xy + y^2$;

б) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{5}$.

В решении задачи а) перепишем уравнение в виде

$$x^2 - (y+1)x + y^2 - y = 0$$

и попытаемся его решить относительно x, считая заданным y. Дискриминант $D = -3y^2 + 6y + 1$ не обращается в нуль при целых y. Он положителен и является полным квадратом при $y = 0, 1, 2$. Значения x соответственно 0 и 1, 2 и 0, 2 и 2.

В случае б) имеем $xy \ne 0$, $xy = 5(x + y)$. Здесь левая часть делится на 5. Пусть, например, $x = 5k$ $(k \ne 0)$. Тогда $ky = 5k + y$ $(k \ne 1)$. Отсюда $y = \frac{5k}{k-1}$. Видно, что значение $k = 2$ подходит. В других случаях (при $k \ne 2, k \ne 0$) k не делится на $k - 1$, поэтому 5 должно делиться на $k - 1$. Это возможно лишь при $k = 6$ или $k = -4$. Итак, $k \in \{2, 6, -4\}$. Отсюда

$$(x; y) \in \{(10;10), (30;6), (-20;4)\}.$$

Другие решения получаются из этих перестановкой чисел в парах.

Полезно взять на заметку прием решения более общего уравнения

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{p},$$

основанный на сведении уравнения к виду $px + py = xy$, откуда

$$(x - p)(y - p) = p^2 .$$

Далее перебирать способы разложения на множители правой части.

Пример 1.14. а) Два натуральных двузначных числа, записанных одно за другим, образуют четырехзначное число, которое делится на их произведение. Найдите эти числа.

б) Найдите все пары пятизначных чисел x, y, такие, что число, полученное переписыванием десятичной записи числа y после десятичной записи числа x, делится на произведение $x \cdot y$ [ЕГЭ 2010. Вариант 4. Часть 2. Задание С6].

Решение. Рассмотрим случай а). Пусть a, b — искомые числа, тогда по условию $a \cdot 10^2 + b = k \cdot ab$, $k \in N$. Отсюда видно, что b делится на a и $a \cdot 10^2$ делится на b: $b = ma$, $a \cdot 10^2 = nb$ $(m, n \in N)$. Кроме того, $m \le 9$ (иначе b станет более чем двузначным) и 10^2 делится на m. Следовательно, $m \in \{1, 2, 4, 5\}$. Далее займемся перебором.

1) $m = 1$. Из равенства $a \cdot 10^2 + b = k \cdot ab$ получим $10^2 + 1 = ka$. Нет двузначного числа a в качестве множителя числа 101.

2) $m = 2$, $10^2 + 2 = k \cdot 2a$. Отсюда $51 = ka$, $a = 17$, $b = 34$. Значение $a = 51$ не подходит, так как b будет трехзначным.

3) $m = 4$. Имеем $10^2 + 4 = k \cdot 4a$, $26 = ka$. Отсюда $a = 13$, $b = 52$.

4) При $m = 5$ получим $10^2 + 5a = k \cdot 5a$, $a = 21$. Но тогда $b = 110$.

Проверка показывает, что задача имеет два решения (17; 34) и (13; 52).

В случае б) следует повторить те же рассуждения с заменой 10^2 на 10^5. С логической точки зрения задача та же, но она труднее технически: ведь надо разлагать на множители большие числа вида $\dfrac{10^5 + m}{m}$, $m = 1, 2, 3, 4, 5$.

$$100\,001 = 11 \cdot 9091,\ \ 50\,001 = 3 \cdot 7 \cdot 2381,$$
$$25\,001 = 23 \cdot 1087,\ \ 20\,001 = 3 \cdot 59 \cdot 113.$$

Абитуриенту при тестировании в условиях ограниченного времени и без калькулятора такая задача может оказаться не по силам. Приведем ответ к случаю б). При $m = 2$ $x = 7 \cdot 2381 = 16\,667$, $y = 2x = 33\,334$.

Пример 1.15.[1] У натурального числа n ровно 6 натуральных делителей. Сумма этих делителей равна 3500. Найдите n.

Сдающему ЕГЭ следует взять на вооружение следующий фундаментальный факт: всякое натуральное число $n > 1$ представимо в виде

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}, \tag{1.1}$$

[1] Источник: Самое полное издание типовых вариантов реальных заданий ЕГЭ: 2010: Математика. — М.: АСТ: Астрель, 2010. С. 84.