С.П. Соловьев

Методы решения иррациональных уравнений и неравенств

Москва
ИЛЕКСА
2021

УДК 373.167.1:51(023)
ББК 22.193я721
С60

Соловьев С.П.

С60 Методы решения иррациональных уравнений и неравенств. — М.: ИЛЕКСА, 2021. — 220 с.: ил.

ISBN 978-5-89237-669-3

Пособие посвящено подробному разбору существующих способов решения иррациональных уравнений и неравенств. При этом классификация этих уравнений и неравенств осуществляется именно по методам их решения.

Пособие может быть использовано для подготовки к профильной части ЕГЭ по математике, олимпиадам различного уровня. Оно может рассматриваться и как элективный курс для учащихся 10–11 классов, и как своеобразный справочник по составлению иррациональных уравнений и неравенств.

Книга предназначается учащимся старших классов, учителям, студентам математических вузов и всем лицам, заинтересованным в повышении уровня своего математического образования.

УДК 373.167.1:51(023)
ББК 22.193я721

ISBN 978-5-89237-669-3

Оглавление

Гражданин второсортной эпохи,
гордо признаю я товаром второго сорта
свои лучшие мысли и дням грядущим
я дарю их как опыт борьбы с удушьем.
И. Бродский

Предисловие

Это пособие посвящено подробному разбору существующих способов решения иррациональных уравнений и неравенств. В старой дихотомии о способах классификации этих уравнений — по видам или по методам решения — в пособии отдано предпочтение второму способу. Это связано с тем, что классификация уравнений по видам практически необозрима. Классификация же по методам решения конечна. Именно способность решить уравнение несколькими способами показывает гибкость и развитость мышления. Наблюдается пристрастность авторов только к некоторым способам, а другие даже не упоминаются. Мы пытались показать, что возведение в степень и введение новой переменной не являются альфой и омегой в решении иррациональных уравнений, как это могло показаться после изучения школьного курса математики или после прочтения пособия [4]. Конечно, если задача состоит в том, чтобы только получить ответ, не считаясь со временем, то этим можно и ограничиться. Но этого не достаточно, если стоит задача по развитию мышления.

Из современных УМК надо выделить линию, созданную под руководством А.Г. Мордковича. В них эта тематика является сквозной и ей отведено много внимания. В рамках ЕГЭ иррациональности в базовой части встречаются не часто. Однако в профильной — регулярно в уравнениях, неравенствах и в задачах с параметрами. Кроме того, задания подобного вида регулярно включаются в вузовские олимпиады, всевозможные заочные конкурсы, олимпиады школьного и районного уровней. Всё это можно найти в этом пособии.

Пособие также можно использовать при самоподготовке к фронтальному повторению и углублению техники алгебраических преобразований за весь школьный курс. Ведь почти все те же методы применя-

ются и при решении других уравнений и неравенств. Техника работы с ОДЗ, с равносильностью, со следствиями постоянно проверяется на ЕГЭ. Иррациональности являются благоприятной средой для отработки этой техники — после каждого параграфа даётся практикум для отработки того метода, который разбирался в нём. В практикуме дано подробное решение примера именно этим методом. Но к нему лучше обращаться после своего решения. Только тогда может завязаться заочный диалог между автором и обучающимся. Кроме того, в практикуме есть задания на развитие рассмотренного метода, и автору хотелось бы, чтобы учащийся выполнил их сам.

Пособие может рассматриваться и как элективный курс, который лучше начинать с 10 –11 класса, когда основные начальные приёмы работы с иррациональностями освоены. Поэтому в пособии вы не найдёте изложения начальных приёмов преобразования иррациональностей. Они есть не только в учебниках, но ими пестрит множество пособий для подготовки к экзаменам (например, [4]; [5]). Здесь так же не даётся расчасовка по каждой теме. Связано это с тем, что она сильно зависит от уровня подготовки учащихся в группе и отведённого времени. Что разобрать в классе, что дать для самостоятельной работы в классе, а что дать для размышлений дома — всё это учитель определяет сам. Расписанные подробно решения и список используемой литературы облегчат ему эту задачу.

Кроме всего прочего, автор надеется, что пособие будет являться своеобразным справочником по составлению иррациональных уравнений и неравенств. Ибо большая часть их решений доведена до уровня прозрачности. Ведь решение действительно понято (а не просто получен верный ответ), если учащийся может сам составить похожее задание. Но эта обратная задача — задача действительно творческая. Её не мешало бы упускать из вида в работе с одаренными детьми. Хотя автор понимает сложности в затратах времени на такого рода творчество, но если есть возможность, то упускать её не стоит, увлекаясь накоплением в головах учащихся бесконечного набора математических фактов. Глубокая проработка одной темы значительно полезнее для развития мышления, чем знакомство с множеством тем.

Все ваши замечания и предложения по книге автор будет рад получить по e-mail: fenomeno-logiy@yandex.ru.

Глава 1. Когда корень извлекается

№ 1. а) Упростить выражение $\sqrt{5+2\sqrt{6}}-\sqrt{5-2\sqrt{6}}$.

1 способ. Обозначим данное выражение через A и найдём

$$A^2=\left(5+2\sqrt{6}\right)-2\sqrt{\left(5+2\sqrt{6}\right)\left(5-2\sqrt{6}\right)}+\left(5-2\sqrt{6}\right)=$$

$$=10-2\sqrt{5^2-\left(2\sqrt{6}\right)^2}=10-2=8.$$

Так как $A>0$, то $A=\boxed{2\sqrt{2}.}$

2 способ. Можно найти A и непосредственно, представив подкоренное выражение в виде полного квадрата:

$$5+2\sqrt{6}=(3+2)+2\sqrt{2}\sqrt{3}=\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2.$$

Тогда

$$A=\sqrt{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^2}=\left|\sqrt{2}+\sqrt{3}\right|-\left|\sqrt{2}-\sqrt{3}\right|=$$

$$=\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)+\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)=\boxed{2\sqrt{2}.}$$

Но это не всегда возможно. Желательно иметь признак этой возможности. И он есть: если число $\Delta=\sqrt{a^2-b}$ рационально, то выражение $a\pm\sqrt{b}$ представимо в виде полного квадрата. Получим известные формулы сложного радикала: $\sqrt{a\pm\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\Delta}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-\Delta}{2}}$. В нашем случае $\Delta=\sqrt{5^2-\left(2\sqrt{6}\right)^2}=1$.

Тогда $\sqrt{5\pm2\sqrt{6}}=\sqrt{\frac{5+1}{2}}\pm\sqrt{\frac{5-1}{2}}=\sqrt{3}\pm\sqrt{2}$. С выражением $\sqrt{6-2\sqrt{7}}$ это преобразование не осуществится, так как число $\Delta=\sqrt{6^2-\left(2\sqrt{7}\right)^2}=\sqrt{8}$ иррационально.

б) Доказать, что сумма $\sqrt{1-\frac{1\cdot3}{2}}+\sqrt{2-\frac{3\cdot5}{2}}+\sqrt{3-\frac{5\cdot7}{2}}+\ldots+$ $+\sqrt{40-\frac{79\cdot81}{2}}$ является рациональным числом (журнал «Математика в школе», 2011 г).

Имеем:

$$\Delta_1 = \sqrt{1 - \frac{1\cdot 3}{4}} = \frac{1}{2}, \sqrt{1 - \frac{\sqrt{1\cdot 3}}{2}} = \sqrt{\frac{1+0.5}{2}} - \sqrt{\frac{1-0.5}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{1}}{2};$$

$$\Delta_2 = \sqrt{2^2 - \frac{3\cdot 5}{4}} = \frac{1}{2}, \sqrt{2 - \frac{\sqrt{3\cdot 5}}{2}} = \sqrt{\frac{2+0.5}{2}} - \sqrt{\frac{2-0.5}{2}} = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\Delta_3 = \sqrt{3^2 - \frac{5\cdot 7}{4}} = \frac{1}{2}, \sqrt{3 - \frac{\sqrt{5\cdot 7}}{2}} = \sqrt{\frac{3+0.5}{2}} - \sqrt{\frac{3-0.5}{2}} = \frac{\sqrt{7}}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2};$$

$$\vdots$$

$$\Delta_{40} = \sqrt{40^2 - \frac{79\cdot 81}{4}} = \frac{1}{2},$$

$$\sqrt{40 - \frac{\sqrt{79\cdot 81}}{2}} = \sqrt{\frac{40+0.5}{2}} - \sqrt{\frac{40-0.5}{2}} = \frac{\sqrt{81}}{2} - \frac{\sqrt{79}}{2};$$

Складывая, получим $\frac{\sqrt{81}}{2} - \frac{\sqrt{1}}{2} = \boxed{4.}$

в) Вычислить $A = \sqrt{5\sqrt{3\sqrt{5\sqrt{3\sqrt{5\sqrt{3\ldots}}}}}}$.

Отделим период под корнем и получим $A = \sqrt{5\sqrt{3A}}$, тогда $A^2 = 5\sqrt{3A}$, $A^4 = 75A$, $\boxed{A = \sqrt[3]{75}.}$

№ 2. Доказать рациональность выражения $A = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$.

1 способ.

$$A^3 = (2+\sqrt{5}) + 3\cdot\sqrt[3]{(2+\sqrt{5})^2}\cdot\sqrt[3]{(2-\sqrt{5})} +$$

$$+ 3\cdot\sqrt[3]{(2+\sqrt{5})}\cdot\sqrt[3]{(2-\sqrt{5})^2} + (2-\sqrt{5}) =$$

$$= 4 + 3\cdot\sqrt[3]{\left(2+\sqrt{5}\right)\left(2-\sqrt{5}\right)}\cdot\left(\sqrt[3]{\left(2+\sqrt{5}\right)} + \sqrt[3]{\left(2-\sqrt{5}\right)}\right) = 4 + 3\cdot(-1)A,$$

т.е. $A^3 + 3A - 4 = 0$,

$A^3 - A + 4A - 4 = A(A^2 - 1) + 4(A - 1) = (A - 1)(A^2 + A + 1) = 0$,

$\boxed{A = 1}$ — рациональное число.

2 способ. Представим подкоренное выражение в виде полного куба методом подбора:

$$\left(\sqrt{5}+1\right)^3 = 5\sqrt{5} + 15 + 3\sqrt{5} + 1 = 8(\sqrt{5}+2), \text{ т.е. } 2+\sqrt{5} = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^3.$$

Тогда $A = \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{1-\sqrt{5}}{2} = \boxed{1.}$

Этот способ не всегда возможен, но критерия его применимости нет. В более сложных случаях подбор может превратиться в отдельную проблему, как в известном выражении $\sqrt[3]{6+\sqrt{\frac{847}{27}}}+\sqrt[3]{6-\sqrt{\frac{847}{27}}}$ из старого задачника [1].

Ответ известен: $6+\sqrt{\frac{847}{27}}=\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{7}{3}}\right)^3$.

№ 3. а) Решить уравнение $\sqrt{x^3+12x^2-11x-2}+\sqrt{x^2+3x-4}=0.$

Так как каждое слагаемое не меньше нуля, то уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x^3+12x^2-11x-2=0, \\ x^2+3x-4=0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^3+12x^2-11x-2=0, \\ x=-4;\ 1. \end{cases}$$

Подставляя полученные корни из второго уравнения в первое, найдём решение системы, а значит, и корень исходного уравнения: $\boxed{x=1.}$

б) Решить уравнение $\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}=1.$

Пусть $\sqrt{x-1}=y$, тогда $x=y^2+1$ и $\sqrt{y^2+1-2y}+\sqrt{y^2+4-4y}=1$, $|y-1|+|y-2|=1.$

1 способ. Перебор вариантов.

$y<1$, $(y-1)+(y-2)=-1$, $y=1$ — постороннее решение;

$1\le y\le 2$, $(y-1)+(2-y)=1$, $1=1$, $1\le y\le 2$, $1\le\sqrt{x-1}\le 2$, $\boxed{2\le x\le 5}$;

$y>2$, $(y-1)+(y-2)=1$, $y=2$ — постороннее решение.

2 способ. Применение свойств модуля.

$|y-1|+|2-y|=(y-1)+(2-y)$, так как модули раскрыты со знаком плюс, то подмодульные выражения неотрицательны $\begin{cases} y-1\ge 0, \\ 2-y\ge 0; \end{cases}$ $\begin{cases} y\ge 1, \\ y\le 2; \end{cases}$ $1\le y\le 2$, $\boxed{2\le x\le 5.}$

Практикум № 1

№ 1. Упростить выражения:

а) $\frac{1}{1+\sqrt[3]{14}+\sqrt[3]{196}}+\frac{1}{1-\sqrt[3]{12}+2\sqrt[3]{18}}+\frac{1}{9+3\sqrt[3]{14}+\sqrt[3]{196}}$;

б) $\dfrac{\sqrt[3]{7-\sqrt{50}}+\sqrt[3]{7+\sqrt{50}}}{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}$.

№ 2. Доказать неравенства:

а) $\sqrt{19{,}7+\sqrt{19{,}7+\sqrt{19{,}7+\sqrt{19{,}7+\sqrt{19{,}7+\sqrt{20}}}}}}<5$;

б) $\sqrt{20\sqrt{19\sqrt{18\sqrt{17\sqrt{\cdots\cdots\sqrt{3\sqrt{2\sqrt{1}}}}}}}}<19{,}7$.

№ 3. Доказать рациональность чисел:

а) $\sqrt[3]{29\cdot\sqrt{2}-45}-\sqrt[3]{29\cdot\sqrt{2}+45}$;

б) $\sqrt{12\cdot\sqrt[3]{2}-15}+2\sqrt{3\cdot\sqrt[3]{4}-3}$.

№ 4. Найти значение выражения $\sqrt{3x+19-\dfrac{3}{x}}-\sqrt{x+18+\dfrac{3}{x}}$ при $x=3\pm\sqrt{6}$, $x=\dfrac{-5\pm\sqrt{13}}{2}$.

№ 5. а) Найти y из уравнения $\dfrac{x^2}{y^2}+y^2=3+2\sqrt{x^2-1}$ при $x=\dfrac{5}{3};\dfrac{13}{12}$.

б) Вычислить $\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}$ при $x=-\sqrt{4\sqrt{5}-8}$.

№ 6. Найти значение выражения $\dfrac{2a}{a-3}$, если $a=\dfrac{\sqrt{13}+3\pm\sqrt{6\sqrt{13}-14}}{2}$.

№ 7. Решить уравнения:

а) $\sqrt{9-(x-8)\sqrt{1-(x-3)\cdot\sqrt{9+(x+2)(x-4)}}}=1-2x$.

б) $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1$.

в) $\sqrt{x+6+4\sqrt{x+2}}-\sqrt{x+6-4\sqrt{x+2}}=4$.

Глава 2. Решение уравнений с привлечением ОДЗ и ООУ

Обычно под ОДЗ уравнения понимают множество всех значений x, при которых входящие в уравнения функции имеют смысл. Это определение назовём субстанциональным. В практике решения оно не всегда удобно. Чаще приходится довольствоваться системой ограничений на x, не решая её до конца или даже накладывать не все ограничения. Более того, иногда эти ограничения приходится вводить постепенно, по частям. Так, задаваемое ОДЗ будем называть процессуальным.

Под областью определения уравнения (ООУ) будем понимать те ограничения на x, которые накладываются знаком равенства левой и правой части уравнения в процессе его решения. Это процессуальное определение. Субстанциональное определение ООУ не имеет дополнительного теоретического смысла, так как оно совпадает с множеством решений уравнения.

№ 4. Решить уравнения:

а) $\sqrt{x-2}+\sqrt{1-x}=3$. ОДЗ: $\begin{cases} x-2\ge 0, \\ 1-x\ge 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x\ge 2, \\ x\le 1; \end{cases}$ $\boxed{x\in\varnothing.}$

б) $\sqrt{x^2-x}+\sqrt{2-x-x^2}=\sqrt{x}-1$. ОДЗ: $\begin{cases} x^2-x\ge 0, \\ x^2+x-2\le 0, \\ x\ge 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x\le 0;\ x\ge 1, \\ -2\le x\le 1, \\ x\ge 0; \end{cases}$

$x=0;\ 1$. Подстановкой проверяем, что $\boxed{x=1}$ является решением.

№ 5. Решить уравнения:

а) $\sqrt{5-x}+\sqrt{8+2x}=2$. ОДЗ: $-4\le x\le 5$ мало поможет для решения.

Перепишем уравнение двумя способами

$$\begin{cases} \sqrt{5-x}=2-\sqrt{8+2x}, \\ \sqrt{8+2x}=2-\sqrt{5-x}. \end{cases}$$

Тогда ООУ:

$$\begin{cases} 2\ge\sqrt{8+2x}, \\ 2\ge\sqrt{5-x}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 \le 8 + 2x \le 4, \\ 0 \le 5 - x \le 4; \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4 \le x \le -2, \\ -1 \le x \le 5; \end{cases}$$

т.е. $\boxed{\text{решений нет.}}$

б) $\sqrt{x^2 - 4x + 8} + \sqrt{x^2 - 4x + 5} = 3.$

$\sqrt{(x-2)^2 + 4} + \sqrt{(x-2)^2 + 1} = 3.$ Теперь оценим левую часть уравнения:

$$\sqrt{(x-2)^2 + 4} + \sqrt{(x-2)^2 + 1} \ge \sqrt{0+4} + \sqrt{0+1} = 3.$$

Значит, уравнение верно только при $\boxed{x = 2.}$

в) $\sqrt{x + x^2 - 1} + \sqrt{x - x^2 + 1} = x^2 - x + 2.$

Мы знаем что $\sqrt{a}\sqrt{b} \le \dfrac{a+b}{2}$ для $a \ge 0, b \ge 0$. Тогда

$$x^2 - x + 2 = \sqrt{x + x^2 - 1}\sqrt{1} + \sqrt{x - x^2 + 1}\sqrt{1} \le$$
$$\le \frac{1}{2}(x + x^2 - 1 + 1) + \frac{1}{2}(x - x^2 + 1 + 1) = x + 1.$$

Т.е. $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 \le 0$, значит, $x = 1$. Проверкой убеждаемся, что $\boxed{x = 1}$ является решением.

г) $\sqrt[3]{21 + 3x} + \sqrt[3]{33 - 3x} = 6.$

Для оценки левой части уравнения потребуется уже другое неравенство, связанное с выпуклостью вверх функции $y = \sqrt[n]{x}$: для чисел $a \ge 0, b \ge 0$ верно $\dfrac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2} \le \dfrac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2}$.

Тогда

$$\sqrt[3]{21 + 3x} + \sqrt[3]{33 - 3x} \le 2 \cdot \sqrt[3]{\frac{21 + 3x + 33 - 3x}{2}} = 6,$$

т.е. уравнение верно при $a = b, 21 + 3x = 33 - 3x, \boxed{x = 2.}$

№ 6. Решить уравнения:

а) $\sqrt[6]{1 - x} = \sqrt[3]{x - 2}$. ОДЗ и ООУ: $\begin{cases} 1 - x \ge 0, \\ x - 2 \ge 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x \le 1, \\ x \ge 2; \end{cases}$ $\boxed{x \in \varnothing.}$

б) $\sqrt{4 + x} + \sqrt[4]{16 - x} = 2$. ОДЗ: $-4 \le x \le 16$.

Если $-4 \le x \le 0$, то $\sqrt[4]{16 - x} \ge \sqrt[4]{16} = 2$. В этом случае равенство может быть верным только при $x = 0$. Но это число не является решением уравнения.

Если $0 < x \le 16$, то $\sqrt{4+x} > \sqrt{4} = 2$, т.е. решений тоже нет.

Ответ: $\boxed{x \in \varnothing.}$

в) $\sqrt[4]{8-2x-x^2} + \sqrt{1+x} = 6 + 2x - x^2$. ОДЗ: $\begin{cases} x^2 + 2x - 8 \le 0, \\ 1 + x \ge 0; \end{cases}$

$\begin{cases} (x+4)(x-2) \le 0, \\ x \ge -1; \end{cases}$ $-1 \le x \le 2.$

На этом множестве $6 + 2x - x^2 \ge 3$, так как

$$3 - (6 + 2x - x^2) = x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3) \le 0.$$

Тогда

$$\sqrt[4]{8-2x-x^2} + \sqrt{1+x} = \sqrt[4]{8-2x-x^2} + \sqrt[4]{1+2x+x^2} \le$$

$$\le 2 \cdot \sqrt[4]{\frac{8-2x-x^2+1+2x+x^2}{2}} = \sqrt[4]{72} < 3.$$

Ответ: $\boxed{x \in \varnothing.}$

С более развёрнутым применением метода оценки при решении уравнений можно ознакомиться в статье [6].

Практикум № 2

№ 1. $\sqrt{1-2x+x^2} + \sqrt{26+3x-5x^2} = x - 1.$

№ 2. $\sqrt[4]{x(2-x)} + \sqrt[3]{x^4(2-x)^7(x+3)^5} + \sqrt[6]{(x-2)(x+1)x^2} + \sqrt[5]{(x+2)(x+6)} = 2.$

№ 3. $2\sqrt{x^2-5x+6} + \sqrt{4x-x^2-3} = 2 + \sqrt{6x-x^2-8}.$

№ 4. $\sqrt{9+x} + \sqrt[4]{81-x} = 3.$

№ 5. $2x + \sqrt{x^2 \cdot \left(4 - x\sqrt{x^2-8x+16}\right)} = x^2.$

№ 6. $\sqrt{25-x^2} + \sqrt{x^2+7x} = 3.$

№ 7. $\dfrac{\sqrt{x+6} - \sqrt{x-6}}{\sqrt{x+6} + \sqrt{x-6}} = \dfrac{x}{6}.$

№ 8. а) $\sqrt{x+5} + \sqrt{x-5} = 3.$

б) $9x + 6\sqrt{x} = x^2 + 34.$

№ 9. $\sqrt{x^2-2x-3} + x^2 + 3 = 4x.$

№ 10. $\sqrt{x^2+x+7} + \sqrt{11-x-x^2} = 6.$

№ 11. $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}} + \dfrac{3}{\sqrt{x^2+2x+26}} = 1{,}6.$

№ 12. $\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x+1}}=\sqrt{3.75-x-x^2}.$

№ 13. $\sqrt[6]{30x-7-9x^2}=\sqrt[3]{3x-5}+\sqrt[3]{x+\frac{4}{9x}+22\frac{2}{3}}.$

№ 14. $\begin{cases}(x-7)^2+\sqrt{x+y}=5,\\ y^2=\sqrt{x+y-25}+324.\end{cases}$

№ 15. $\begin{cases}3\cdot\sqrt{x+7}=y+3,\\ 3\cdot\sqrt{y+7}=z+3,\\ 3\cdot\sqrt{z+7}=x+3.\end{cases}$

Решебник

Практикум № 1

№ 1. а) *Ответ:* $\frac{1}{13}\cdot\left(3+\sqrt[3]{12}\right)$.

Решение:

$$\frac{1}{1+\sqrt[3]{14}+\sqrt[3]{196}}+\frac{1}{1-\sqrt[3]{12}+2\sqrt[3]{18}}+\frac{1}{9+3\sqrt[3]{14}+\sqrt[3]{196}}=$$

$$=\frac{1}{(\sqrt[3]{1})^2+\sqrt[3]{1\cdot 14}+(\sqrt[3]{14})^2}+\frac{1}{(\sqrt[3]{1})^2-\sqrt[3]{1\cdot 12}+(\sqrt[3]{12})^2}+$$

$$+\frac{1}{(\sqrt[3]{27})^2+\sqrt[3]{27\cdot 14}+(\sqrt[3]{14})^2}=$$

$$=\frac{\sqrt[3]{14}-\sqrt[3]{1}}{\left(\sqrt[3]{14}\right)^3-\left(\sqrt[3]{1}\right)^3}+\frac{\sqrt[3]{12}+\sqrt[3]{1}}{\left(\sqrt[3]{12}\right)^3+\left(\sqrt[3]{1}\right)^3}+\frac{\sqrt[3]{27}-\sqrt[3]{14}}{\left(\sqrt[3]{27}\right)^3-\left(\sqrt[3]{14}\right)^3}=$$

$$=\frac{1}{13}\cdot\left(\sqrt[3]{14}-1+\sqrt[3]{12}+1+3-\sqrt[3]{14}\right)=\frac{1}{13}\cdot\left(3+\sqrt[3]{12}\right).$$

б) *Ответ:* $\sqrt{6}+\sqrt{2}$.

Решение:

$$\frac{\sqrt[3]{7-\sqrt{50}}+\sqrt[3]{7+\sqrt{50}}}{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}.$$

Для числителя имеем:

$$\left(\sqrt{2}-1\right)^3=5\sqrt{2}-7=\sqrt{50}-7,$$

$$\left(\sqrt{2}+1\right)^3=5\sqrt{2}+7=\sqrt{50}+7,$$

т.е.

$$\left(1-\sqrt{2}\right)+\left(1+\sqrt{2}\right)=2.$$

Для знаменателя имеем:

$$\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{2^2-\left(\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}\right)^2}=$$

$$=\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}=\sqrt{4-\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^2}=$$

$$=\sqrt{2-\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{4-2\sqrt{3}}{2}}=\sqrt{\frac{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}{2}}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}.$$

Тогда всё выражение будет равно

$$2:\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1}=\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+1\right)=\sqrt{6}+\sqrt{2}.$$

№ 2. *Доказательство:*

а)

$$\sqrt{19{,}7+\sqrt{19{,}7+\sqrt{19{,}7+\sqrt{19{,}7+\sqrt{19{,}7+\sqrt{20}}}}}}<$$

$$<\sqrt{20+\sqrt{20+\sqrt{20+\sqrt{20+\sqrt{20+\sqrt{25}}}}}}=5,\text{ ч.т.д.}$$

б)

$$\sqrt{20\sqrt{19\sqrt{18\sqrt{17\sqrt{\cdots\sqrt{3\sqrt{2\sqrt{1}}}}}}}}<\sqrt{20\sqrt{19\sqrt{20\sqrt{19\sqrt{\cdots\sqrt{19\sqrt{20\sqrt{19\sqrt{\ldots}}}}}}}}}=x.$$

$$\sqrt{20\sqrt{19x}}=x,$$

$$x^3=20^2\cdot 19=7600<19{,}7^3=7645{,}373,\text{ ч.т.д.}$$

№ 3. а) *Ответ:* -6.

Решение:

$$\sqrt[3]{29\cdot\sqrt{2}-45}-\sqrt[3]{29\cdot\sqrt{2}+45}=A.$$

Перебором вариантов находим

$$\left(\sqrt{2}+3\right)^3=2\sqrt{2}+18+27\sqrt{2}+27=29\sqrt{2}+45,$$

тогда

$$29\sqrt{2}-45=\left(\sqrt{2}-3\right)^3,$$

так как $29\sqrt{2}<30\cdot 1{,}5=45$.

Тогда

$$A=\left(\sqrt{2}-3\right)-\left(\sqrt{2}+3\right)=-6.$$

б) *Ответ:* 3.

Решение:

$$A=\sqrt{12\cdot\sqrt[3]{2}-15}+2\sqrt{3\cdot\sqrt[3]{4}-3}>0.$$

Для упрощения преобразований положим $x^3 = 2$. Тогда

$$A = \sqrt{12x - 15} + \sqrt{12x^2 - 12}.$$

Так как

$$(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1,$$

а

$$y = (x+1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 3 + 3(x^2 + x),$$

т.е. x^2 и x должны встречаться вместе. Но под корнями нет полных квадратов или кубов.

Чтобы они стояли вместе, найдём

$$A^2 = 12(x^2 + x) - 27 + 2\sqrt{3(4x-5)\cdot 12(x^2-1)} =$$
$$= 12(x^2 + x) - 27 + 12\sqrt{13 - 5x^2 - 4x}.$$

Легко выражается через у комбинация $x^2 + x = \dfrac{y-3}{3}$.

Для выражения через y комбинации $(-5x^2 - 4x)$ найдём

$$y^2 = 9(x^2 + x + 1)^2 = 9\left[x^4 + x^2 + 1 + 2(x^3 + x^2 + x)\right] = 9(3x^2 + 4x + 5).$$

Откуда

$$3x^2 + 4x = \frac{y^2 - 45}{9}.$$

Теперь можем выразить искомое выражение

$$-5x^2 - 4x = -8(x^2 + x) + \left(3x^2 + 4x\right) = \frac{y^2 - 45}{9} - \frac{8y - 24}{3} = \frac{y^2 - 24y + 27}{9}.$$

Полученные выражения подставляем в $A^2 = 12\left(\dfrac{y-3}{3}\right) - 27 +$

$$+12\sqrt{13 + \frac{y^2 - 24y + 27}{9}} = 4y - 39 + 4\sqrt{y^2 - 24y + 144} = 4y - 39 + 4|y - 12| =$$

$= 4y - 39 - 4(y - 12) = 9$, т.е. $A = 3$.

Действительно,

$$y - 12 = 3(x^2 + x - 3) = 3\left(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} - 3\right) < 3\left(\sqrt[3]{4{,}096} + \sqrt[3]{2{,}197} - 3\right) =$$
$$= 3\left(1{,}6 + 1{,}3 - 3\right) < 0.$$

Замечание. Пример показывает, что рациональность числа не означает извлекаемости каждого корня, как это могло показаться при разборе заданий в теоретической части. Не сложно показать, что разбираемое число имеет следующую структуру:

$$A = \sqrt{3(x+1)(x-1)^3} + \sqrt{12(x+1)(x-1)},$$

где $x^3 = 2$.

№ 4. *Ответ:* ± 1.

Решение: Если $x_1 = \dfrac{-5-\sqrt{13}}{2} = \dfrac{-6}{5-\sqrt{13}}$, то подставляя получим

$$\sqrt{\frac{-15-3\sqrt{13}}{2}+19+\frac{5-\sqrt{13}}{2}} - \sqrt{\frac{-5-\sqrt{13}}{2}+18-\frac{5-\sqrt{13}}{2}} =$$

$$= \sqrt{14-2\sqrt{13}} - \sqrt{13} = \sqrt{\left(\sqrt{13}-1\right)^2} - \sqrt{13} = -1.$$

Если $x_2 = \dfrac{-5+\sqrt{13}}{2} = \dfrac{-6}{5+\sqrt{13}}$, то

$$\sqrt{\frac{-15+3\sqrt{13}}{2}+19+\frac{5+\sqrt{13}}{2}} - \sqrt{\frac{-5+\sqrt{13}}{2}+18-\frac{5+\sqrt{13}}{2}} =$$

$$= \sqrt{14+2\sqrt{13}} - \sqrt{13} = \sqrt{\left(\sqrt{13}+1\right)^2} - \sqrt{13} = 1.$$

Если $x_3 = 3-\sqrt{6} = \dfrac{3}{3+\sqrt{6}}$, то

$$\sqrt{9-3\sqrt{6}+19-3-\sqrt{6}} - \sqrt{3-\sqrt{6}+18+3+\sqrt{6}} = \sqrt{25-4\sqrt{6}} - \sqrt{24} =$$

$$= \sqrt{\left(2\sqrt{6}-1\right)^2} - \sqrt{24} = -1.$$

Если $x_4 = 3+\sqrt{6} = \dfrac{3}{3-\sqrt{6}}$, то

$$\sqrt{9+3\sqrt{6}+19-3+\sqrt{6}} - \sqrt{3+\sqrt{6}+18+3-\sqrt{6}} = \sqrt{25+4\sqrt{6}} - \sqrt{24} =$$

$$= \sqrt{\left(2\sqrt{6}+1\right)^2} - \sqrt{24} = 1.$$

№ 5. а) *Ответ:* $x = \dfrac{5}{3},\ y = \pm\dfrac{9\pm\sqrt{21}}{6}$; $x = \dfrac{13}{12},\ y = \pm\dfrac{3\sqrt{6}\pm\sqrt{15}}{6}$.

Решение:

$$\frac{x^2}{y^2} + y^2 = 3 + 2\sqrt{x^2-1}.$$

Преобразуем выражение к виду

$$\left(\frac{x}{y} + y\right)^2 = 3 + 2\sqrt{x^2-1} + 2x.$$

Если $x_1 = \dfrac{5}{3}$, то

$$\left(\frac{5}{3y}+y\right)^2=3+\frac{8}{3}+\frac{10}{3}=9,$$

$$\frac{5}{3y}+y=\pm 3,$$

$$3y^2\pm 9y+5=0,$$

$$y=\pm\frac{9\pm\sqrt{21}}{6}.$$

Если $x_2=\frac{13}{12}$, то

$$\left(\frac{13}{12y}+y\right)^2=3+\frac{10}{12}+\frac{26}{12}=6,$$

$$\frac{13}{12y}+y=\pm\sqrt{6},$$

$$12y^2\pm 12\sqrt{6}y+13=0,$$

$$y=\pm\frac{3\sqrt{6}\pm\sqrt{15}}{6}.$$

б) *Ответ:* $1-\sqrt{5}$.

Решение: Вычислить $\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}$ при $x=-\sqrt{4\sqrt{5}-8}$.

1 способ.

$$\sqrt{1+x}=\sqrt{1-\sqrt{4\sqrt{5}-8}}=\sqrt{\frac{1+\Delta}{2}}-\sqrt{\frac{1-\Delta}{2}},$$

где

$$\Delta=\sqrt{1^2-\left(\sqrt{4\sqrt{5}-8}\right)^2}=\sqrt{9-4\sqrt{5}}=\sqrt{\left(\sqrt{5}-2\right)^2}=\sqrt{5}-2>0.$$

Тогда

$$\sqrt{1+x}=\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}-\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} \text{ и } \sqrt{1-x}=\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}+\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}.$$

В итоге получаем:

$$\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}=-2\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}=-\sqrt{6-2\sqrt{5}}=-\left(\sqrt{5}-1\right)=1-\sqrt{5}.$$

2 способ.

$A=\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}<0$ при $x=-\sqrt{4\sqrt{5}-8}$. Тогда

$$A^2 = 2 - 2\sqrt{1 - x^2} = 2 - 2\sqrt{9 - 4\sqrt{5}} = 2 - 2\sqrt{\left(\sqrt{5} - 2\right)^2} =$$

$$= 2 - 2\left(\sqrt{5} - 2\right) = 6 - 2\sqrt{5} = \left(\sqrt{5} - 1\right)^2,$$

$$A = -\left(\sqrt{5} - 1\right) = 1 - \sqrt{5}.$$

№ 6. *Ответ:* $1 \pm \sqrt{10 + 3\sqrt{13}}$.

Решение: Найти значение выражения $\dfrac{2a}{a-3}$, если

$$a = \frac{\sqrt{13} + 3 \pm \sqrt{6\sqrt{13} - 14}}{2}.$$

Имеем:

$$x = \frac{2a}{a-3} = 2 + \frac{6}{a-3}.$$

Найдём

$$a - 3 = \frac{\sqrt{13} - 3 \pm \sqrt{6\sqrt{13} - 14}}{2}.$$

Но

$$6\sqrt{13} - 14 = 13 + 6\sqrt{13} - 27 = \left(\sqrt{13}\right)^2 + 6\sqrt{13} - 27 =$$

$$= \left(\sqrt{13} + 9\right)\left(\sqrt{13} - 3\right).$$

Тогда

$$a - 3 = \frac{\sqrt{\sqrt{13} - 3} \cdot \left(\sqrt{\sqrt{13} - 3} \pm \sqrt{\sqrt{13} + 9}\right)}{2} =$$

$$= \frac{\sqrt{\left(\sqrt{13}\right)^2 - 3^2}}{\sqrt{\sqrt{13} + 3}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(\sqrt{\sqrt{13} - 3}\right)^2 - \left(\sqrt{\sqrt{13} + 9}\right)^2}{\sqrt{\sqrt{13} - 3} \mp \sqrt{\sqrt{13} + 9}} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\sqrt{13} + 3}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{-12}{\sqrt{\sqrt{13} - 3} \mp \sqrt{\sqrt{13} + 9}} =$$

$$= \frac{-12}{\sqrt{\sqrt{13} + 3}\sqrt{\sqrt{13} - 3} \mp \sqrt{\sqrt{13} + 9}\sqrt{\sqrt{13} + 3}} =$$

$$= \frac{12}{-2 \pm \sqrt{40 + 12\sqrt{13}}} = \frac{6}{-1 \pm \sqrt{10 + 3\sqrt{13}}}.$$

Значит,

$$x = 2 + \left(-1 \pm \sqrt{10 + 3\sqrt{13}} \right) = 1 \pm \sqrt{10 + 3\sqrt{13}}.$$

№ 7. а) *Ответ:* $x = -4$.

Решение:

$$\sqrt{9 - (x-8)\sqrt{1 - (x-3) \cdot \sqrt{9 + (x+2)(x-4)}}} = 1 - 2x.$$

Для правой части уравнения имеем: $1 - 2x \geq 0$, т.е. $x \leq 0{,}5$.

Тогда

$$\sqrt{9 + (x+2)(x-4)} = \sqrt{x^2 - 2x + 1} = |x - 1| = 1 - x, \text{ при } x \leq 0{,}5.$$

Далее:

$$\sqrt{1 - (x-3)(1-x)} = \sqrt{x^2 - 4x + 4} = |x - 2| = 2 - x,$$

$$\sqrt{9 - (x-8)(2-x)} = \sqrt{x^2 - 10x + 25} = |x - 5| = 5 - x.$$

Тогда

$$5 - x = 1 - 2x, \ \ x = -4.$$

б) *Ответ:* $x \in [5; 10]$.

Решение:

$$\sqrt{x + 3 - 4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x + 8 - 6\sqrt{x-1}} = 1.$$

Пусть $y = \sqrt{x-1} \geq 0$, т.е. $x = y^2 + 1$.

Тогда

$$\sqrt{y^2 - 4y + 4} + \sqrt{y^2 - 6y + 9} = 1,$$

$$|y - 2| + |y - 3| = 1,$$

$$|y - 2| + |y - 3| = (y - 2) + (3 - y),$$

$$\begin{cases} y - 2 \geq 0, \\ 3 - y \geq 0; \end{cases}$$

$$2 \leq y \leq 3,$$

$$5 \leq x \leq 10.$$

в) *Ответ:* $x \in [2; +\infty)$.

Решение:

$$\sqrt{x + 6 + 4\sqrt{x+2}} - \sqrt{x + 6 - 4\sqrt{x+2}} = 4.$$

Пусть $y = \sqrt{x+2} \geq 0$, т.е. $x = y^2 - 2$.

Тогда

$$\sqrt{y^2 + 4y + 4} - \sqrt{y^2 - 4y + 4} = 4,$$

$$|y + 2| - |y - 2| = 4,$$

$$|y + 2| - |y - 2| = (y + 2) - (y - 2),$$

$$\begin{cases} y+2 \ge 0, \\ y-2 \ge 0; \end{cases}$$

$$y \ge 2,\ \ x \ge 2.$$

Практикум № 2

№ 1. *Ответ:* $x = 2{,}6$.

Решение:

$$\sqrt{1-2x+x^2} + \sqrt{26+3x-5x^2} = x-1.$$

$$|x-1| + \sqrt{26+3x-5x^2} = x-1,$$

так как ООУ: $x \ge 1$, то, раскрывая модуль, получим

$$\sqrt{26+3x-5x^2} = 0,$$

$$5x^2 - 3x - 26 = 0,$$

$$5x = -10;\ 13;$$

$x = -2$ — посторонний, $x = 2{,}6$ — решение.

№ 2. *Ответ:* $x = 2$.

Решение:

$$\sqrt[4]{x(2-x)} + \sqrt[3]{x^4(2-x)^7(x+3)^5} + \sqrt[6]{(x-2)(x+1)x^2} + \sqrt[5]{(x+2)(x+6)} = 2.$$

ОДЗ: $\begin{cases} x(2-x) \ge 0, \\ (x-2)(x+1)x^2 \ge 0; \end{cases}$ $\begin{cases} 0 \le x \le 2, \\ \left[\begin{array}{l} x \ge 2, \\ x = 0, \\ x \le -1; \end{array}\right. \end{cases}$ $x = 0; 2.$

Проверкой убеждаемся, что решением является $x = 2$.

№ 3. *Ответ:* $x \in \varnothing$.

Решение:

$$2\sqrt{x^2-5x+6} + \sqrt{4x-x^2-3} = 2 + \sqrt{6x-x^2-8}.$$

ОДЗ: $\begin{cases} x^2-5x+6 = (x-2)(x-3) \ge 0, \\ x^2-4x+3 = (x-1)(x-3) \le 0, \\ x^2-6x+8 = (x-2)(x-4) \le 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x \le 2;\ x \ge 3, \\ 1 \le x \le 3, \\ 2 \le x \le 4; \end{cases}$ $x = 2;\ 3.$

Проверкой убеждаемся, что данные числа не являются решениями.

№ 4. *Ответ:* $x \in \varnothing$.

Решение:

$$\sqrt{9+x} + \sqrt[4]{81-x} = 3.$$

Зададим уравнению две формы:

$$\sqrt[4]{81-x}=3-\sqrt{9+x} \text{ и } \sqrt{3+x}=3-\sqrt[4]{81-x}.$$

Тогда ООУ: $\begin{cases}3-\sqrt{9+x}\ge 0,\\ 3-\sqrt[4]{81-x}\ge 0;\end{cases}$ $\begin{cases}3^2-(9+x)\ge 0,\\ 3^4-(81-x)\ge 0;\end{cases}$ $\begin{cases}x\le 0,\\ x\ge 0.\end{cases}$

Но $x=0$ не является решением.

№ 5. *Ответ:* $x\in(-\infty;\ 0]\cup[2;\ 4]$.

Решение:

$$2x+\sqrt{x^2\cdot\left(4-x\sqrt{x^2-8x+16}\right)}=x^2.$$

$$|x|\sqrt{4-x|x-4|}=x(x-2),$$

$$\text{ООУ: } x(x-2)\ge 0,\ x\le 0;\ x\ge 2.$$

Если $x = 0; 2$, то уравнение верно.

Если $x < 0$, то

$$-x\sqrt{4+x(x-4)}=x(x-2),$$

$$\sqrt{x^2-4x+4}=2-x,$$

$$|2-x|=2-x,$$

что выполняется при $x < 0$.

Если $x > 2$, то

$$\sqrt{4-x|x-4|}=x-2,$$

$$x|x-4|=x(4-x),$$

$$|4-x|=4-x,$$

$$x\le 4.$$

Учитывая исходное условие, получим $2< x\le 4$.

Собираем всё вместе: $x\in(-\infty;\ 0]\cup[2;\ 4]$.

№ 6. *Ответ:* $x\in\varnothing$.

Решение:

$$\sqrt{25-x^2}+\sqrt{x^2+7x}=3.$$

ОДЗ: $\begin{cases}25-x^2\ge 0,\\ x^2+7x\ge 0;\end{cases}$ $\begin{cases}-5\le x\le 5,\\ x\le -7;\ x\ge 0;\end{cases}$

$x\in[0;\ 5]$.

На этом множестве применяем ООУ:

$$\begin{cases}\sqrt{25-x^2}\le 3,\\ \sqrt{x^2+7x}\le 3;\end{cases}\quad\begin{cases}x^2\ge 16,\\ x^2+7x-9\le 0.\end{cases}$$

Из первого неравенства, учитывая ОДЗ, получим

$$4 \le x \le 5.$$

Но на этом множестве второе выражение системы

$$x^2 + 7x - 9 = \left(x + 3{,}5\right)^2 - 21{,}25 \ge \left(4 + 3{,}5\right)^2 - 21{,}25 > 0.$$

Значит, уравнение не имеет решений.

№ 7. *Ответ:* $x = 6.$

Решение:

$$\frac{\sqrt{x+6} - \sqrt{x-6}}{\sqrt{x+6} + \sqrt{x-6}} = \frac{x}{6},$$

$$1 - \frac{2\sqrt{x-6}}{\sqrt{x+6} + \sqrt{x-6}} = \frac{x}{6},$$

$$\frac{6-x}{6} = \frac{2\sqrt{x-6}}{\sqrt{x+6} + \sqrt{x-6}}.$$

ОДЗ и ООУ: $\begin{cases} x - 6 \ge 0, \\ 6 - x \ge 0; \end{cases}$ $x = 6.$

Проверка показывает, что это число является корнем.

№ 8. *Ответ:* а) $x \in \varnothing$. б) $x \in \varnothing$.

Решение:

а)

$$\sqrt{x+5} + \sqrt{x-5} = 3.$$

Так как ОДЗ: $x \ge 5$, то $\sqrt{x+5} \ge \sqrt{10} > 3$, но $\sqrt{x-5} \ge 0$. Значит, левая часть всегда больше правой части. Поэтому решений не будет.

б)

$$9x + 6\sqrt{x} = x^2 + 34,$$

$$(x-5)^2 + \left(\sqrt{x} - 3\right)^2 = 0,$$

$$\begin{cases} x = 5, \\ \sqrt{x} = 3. \end{cases}$$

Опять нет решений.

№ 9. *Ответ:* $x = 3.$

Решение:

$$\sqrt{x^2 - 2x - 3} + x^2 + 3 = 4x.$$

ОДЗ и ООУ:

Проверкой убеждаемся, что число $x = 3$ является решением.

№ 10. *Ответ:* $x=-2;\ 1.$

Решение:

$$\sqrt{x^2+x+7}+\sqrt{11-x-x^2}=6.$$

Оценим левую часть уравнения:

$$\sqrt{x^2+x+7}+\sqrt{11-x-x^2}\le 2\sqrt{\frac{1}{2}\left(x^2+x+7+11-x-x^2\right)}=6.$$

Уравнение выполняется, если левая часть достигнет своего максимума, что происходит при

$$x^2+x+7=11-x-x^2,$$
$$x^2+x-2=0.$$

Проверке на ОДЗ числа $x=-2;\ 1$ удовлетворяют.

№ 11. *Ответ:* $x=-1.$

Решение:

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}}+\frac{3}{\sqrt{x^2+2x+26}}=1{,}6.$$

Оценим левую часть уравнения:

$$\frac{1}{\sqrt{(x+1)^2+1}}+\frac{3}{\sqrt{(x+1)^2+25}}\le\frac{1}{\sqrt{0+1}}+\frac{3}{\sqrt{0+25}}=1+\frac{3}{5}=1{,}6.$$

Значит, $x=-1.$

№ 12. *Ответ:* $x\in\varnothing.$

Решение:

$$\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x+1}}=\sqrt{3{,}75-x-x^2}.$$

Перепишем уравнение в виде:

$$\sqrt{\frac{x+1}{x}}+\sqrt{\frac{x}{x+1}}=\sqrt{4-(x+0{,}5)^2}.$$

Для левой части имеем оценку:

$$\sqrt{\frac{x+1}{x}}+\sqrt{\frac{x}{x+1}}\ge 2\cdot\sqrt[4]{\frac{x+1}{x}}\cdot\sqrt[4]{\frac{x}{x+1}}=2.$$

Для правой части:

$$\sqrt{4-(x+0{,}5)^2}\le 2.$$

Поэтому на решение может претендовать только $x=-0{,}5.$ Но это число не удовлетворяет ОДЗ.

№ 13. *Ответ:* $x=\dfrac{2}{3}.$

Решение:

$$\sqrt[6]{30x-7-9x^2}=\sqrt[3]{3x-5}+\sqrt[3]{x+\frac{4}{9x}+22\frac{2}{3}}.$$

ОДЗ: $9x^2-30x+7\le 0,\ x\in\left[\frac{5}{3}-\sqrt{2};\ \frac{5}{3}+\sqrt{2}\right].$

Функция $f(x)=-9x^2+30x-7$ — парабола с вершиной $O\left(\frac{5}{3};\ 18\right)$ и ветвями вниз. Рассмотрим возможные случаи.

а) Если $3x-5\ge 0$, то $x\in\left[\frac{5}{3};\frac{5}{3}+\sqrt{2}\right]$ и $\sqrt[6]{30x-7-9x^2}\le\sqrt[6]{18}.$

Тогда

$$\sqrt[3]{3x-5}+\sqrt[3]{x+\frac{4}{9x}+22\frac{2}{3}}>\sqrt[3]{22\frac{2}{3}}>\sqrt[6]{18},$$

и на этом множестве решений нет.

б) Если $3x-5<0$, то

$$x\in\left[\frac{5}{3}-\sqrt{2};\ \frac{5}{3}\right).$$

Перепишем уравнение в виде:

$$\sqrt[6]{30x-7-9x^2}+\sqrt[3]{5-3x}=\sqrt[3]{x+\frac{4}{9x}+22\frac{2}{3}}.$$

В нём все слагаемые положительны. Оценим обе части.

$$\sqrt[6]{30x-7-9x^2}+\sqrt[3]{5-3x}=\sqrt[6]{30x-7-9x^2}+\sqrt[6]{25-30x+9x^2}\le$$

$$\le 2\cdot\sqrt[6]{\frac{-7+25}{2}}=2\cdot\sqrt[6]{9}=\sqrt[3]{24}.$$

Причём равенство достигается при

$$30x-7-9x^2=25-30x+9x^2,$$

$$(3x)^2-10(3x)+16=0,$$

$$3x=2;\ 8,$$

$$x_1=\frac{2}{3},$$

$x_2=\frac{8}{3}>\frac{5}{3}$ — посторонний корень.

$$\sqrt[3]{x+\frac{4}{9x}+22\frac{2}{3}}\ge\sqrt[3]{2\sqrt{x\cdot\frac{4}{9x}}+22\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{\frac{4}{3}+22\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{24}.$$

Равенство достигается при $x = \frac{4}{9x}$, $x = \pm\frac{2}{3}$. Подходит только $x = \frac{2}{3}$.

№ 14. *Ответ:* (7; 18).

Решение:

$$\begin{cases} (x-7)^2 + \sqrt{x+y} = 5, \\ y^2 = \sqrt{x+y-25} + 324; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{x+y} = 5 - (x-7)^2, \\ \sqrt{x+y-25} = y^2 - 324. \end{cases}$$

Из второго уравнения следует, что $x + y \geq 25$.

Тогда из первого уравнения получаем, что $5 - (x-7)^2 \geq 5$, т.е. $x = 7$. Но тогда $\sqrt{7+y} = 5$, $y = 18$. Подстановкой во второе уравнение убеждаемся, что пара чисел (7; 18) является решением системы.

№ 15. *Ответ:* $x = y = z = 9$.

Решение:

$$\begin{cases} 3 \cdot \sqrt{x+7} = y + 3, \\ 3 \cdot \sqrt{y+7} = z + 3, \\ 3 \cdot \sqrt{z+7} = x + 3. \end{cases}$$

Так как переменные циклически взаимозаменяемые, а уравнения одинаковы, то можно высказать предположение об их взаимном равенстве. Проверим это. Пусть $x < y$, тогда $3\sqrt{x+7} < 3\sqrt{y+7}$. Учитывая первые два уравнения системы, получим $y < z$. Но тогда $3\sqrt{y+7} < 3\sqrt{z+7}$. Учитывая второе и третье уравнения системы, получим $z < x$. Завершая цикл, придём к противоречию: $x < x$. Аналогично получим и для случая $x > y$. Значит, остаётся только одно: $x = y$. Если бы мы начали с неравенства $y < z$, то, совершая цикл, получили бы $y = z$. Т.е. действительно $x = y = z$. Теперь решим первое уравнение: $\left(\sqrt{x+7}\right)^2 - 3\sqrt{x+7} - 4 = 0$, $\sqrt{x+7} = 4$, $x = y = z = 9$.

Практикум № 3

№ 1. *Ответ:* больше вторая сумма.

Решение: Что больше $\left(\sqrt{2018} + \sqrt{2021}\right)$ или $\left(\sqrt{2019} + \sqrt{2020}\right)$?