

СОДЕРЖАНИЕ

АЛГЕБРА И НАЧАЛА АНАЛИЗА

ФУНКЦИИ	10
Основные свойства функций	11
Четность и нечетность.....	11
Периодичность.....	12
Нули функции.....	12
Монотонность (возрастание, убывание).....	13
Экстремумы (максимумы и минимумы).....	13
Асимптоты.....	14
Обратные функции.....	15
Нахождение формулы для функции, обратной данной.....	15
Преобразования графиков функций	16
Преобразование симметрии относительно оси x	16
Преобразование симметрии относительно оси y	17
Параллельный перенос вдоль оси x	18
Параллельный перенос вдоль оси y	19
Сжатие и растяжение вдоль оси x	20
Сжатие и растяжение вдоль оси y	21
Построение графика функции $y = f(x) $	22
Построение графика функции $y = f(x)$	22
Построение графика обратной функции.....	23
Построение графиков сложных функций с помощью последовательных преобразований графиков элементарных функций.....	24
Линейная функция	26
Частные случаи линейной функции (прямая пропорциональность и постоянная функция).....	26
Взаимное расположение графиков линейных функций.....	26
Свойства линейной функции.....	27
Построение графика линейной функции по двум точкам.....	28
Построение графика линейной функции $y = kx + b$ с помощью элементарных преобразований графика функции $y = x$	29
Квадратичная функция	30
Различные представления квадратичной функции.....	30
Выделение полного квадрата.....	30
Разложение на линейные множители.....	30
Свойства квадратичной функции и ее графика.....	31
Направление ветвей, характерные точки и ось симметрии параболы.....	32

Построение графика квадратичной функции по направлению ветвей, характерным точкам и оси симметрии параболы (примеры)	33
Построение графика квадратичной функции с помощью элементарных преобразований графика функции $y = x^2$	34
Степенные функции с натуральными показателями степени	36
Степенные функции с целыми отрицательными показателями степени	37
Функции $y = \sqrt[n]{x}$	38
Степенные функции с действительными показателями степени	39
Показательная функция	40
Логарифмическая функция	41
Тригонометрические функции	42
Обратные тригонометрические функции	46
УРАВНЕНИЯ	48
Линейные уравнения	49
Квадратные уравнения	50
Неполные квадратные уравнения	51
Теоремы Виета	52
Формулы Виета для корней приведенного квадратного уравнения	52
Уравнения, сводящиеся к квадратным	53
Иррациональные уравнения	54
Простейшие показательные уравнения	55
Простейшие логарифмические уравнения	55
Простейшие тригонометрические уравнения	56
Уравнение с двумя переменными и его график	59
НЕРАВЕНСТВА	61
Линейные неравенства	62
Квадратные неравенства	63
Метод интервалов для неравенств вида $(x - a_1)^{k_1} (x - a_2)^{k_2} \dots (x - a_n)^{k_n} > 0$	64
Применение метода интервалов для решения дробно- рациональных неравенств	65
Иррациональные неравенства	66
Показательные неравенства	67
Логарифмические неравенства	67
Простейшие тригонометрические неравенства	68

СИСТЕМЫ ДВУХ УРАВНЕНИЙ С ДВУМЯ НЕИЗВЕСТНЫМИ

Основные методы решения систем уравнений	71
Метод подстановки	72
Метод сложения	73
Графический метод решения системы двух уравнений с двумя неизвестными	74
Системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными	75

ПРОИЗВОДНАЯ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ

Производная	76
Геометрический смысл производной	76
Уравнение касательной	76
Вторая производная	77
Физический смысл производной	77
Правила дифференцирования	77
Производная сложной функции	77
Применение производной к исследованию функций	78
Монотонность	78
Экстремумы	79
Схема применения производной для нахождения интервалов монотонности и экстремумов	80
Наибольшее и наименьшее значения функции, непрерывной на отрезке	81
Схема нахождения наибольшего и наименьшего значений функции, непрерывной на отрезке	81

ПЕРВООБРАЗНАЯ И ИНТЕГРАЛ

Первообразная	82
Основное свойство первообразных	82
Неопределенный интеграл	82
Правила интегрирования	82
Определенный интеграл	83
Связь между определенным интегралом и первообразной (формула Ньютона-Лейбница)	83
Основные свойства определенного интеграла	83
Геометрический смысл определенного интеграла	84
Физический смысл определенного интеграла	84
Вычисление площадей и объемов с помощью определенного интеграла	85

ГЕОМЕТРИЯ

ПЛАНИМЕТРИЯ	86
Прямые и углы на плоскости.....	86
Виды углов	86
Углы с соответственно параллельными сторонами	86
Углы с соответственно перпендикулярными сторонами	86
Параллельные прямые	87
Признаки и свойства параллельных прямых	87
Перпендикуляр и наклонные	88
Треугольники.....	89
Произвольный треугольник	89
Соотношения между сторонами и углами	89
Признаки равенства треугольников	90
Признаки подобия треугольников	90
Свойство прямой, параллельной стороне треугольника.....	90
Замечательные линии треугольника	91
Свойства медиан.....	92
Свойства биссектрис.....	93
Свойства высот	94
Свойства серединных перпендикуляров	95
Свойства средней линии	96
Вписанная и описанная окружности	96
Площадь треугольника	97
Равнобедренный треугольник	98
Свойства и признаки равнобедренного треугольника.....	98
Равносторонний треугольник	99
Свойства и признаки равностороннего треугольника.....	99
Высота и площадь равностороннего треугольника	99
Прямоугольный треугольник	100
Признаки равенства прямоугольных треугольников.....	100
Признаки подобия прямоугольных треугольников.....	101
Теорема Пифагора.....	101
Соотношения между сторонами и углами в прямоугольном треугольнике.....	102
Свойства проекций катетов	102
Частные случаи прямоугольных треугольников.....	102
Окружность, вписанная в прямоугольный треугольник.....	103
Окружность, описанная около прямоугольного треугольника	103
Площадь прямоугольного треугольника.....	103
Четырехугольники.....	104
Виды четырехугольников.....	104
Произвольный четырехугольник	104

Четырехугольник, описанный около окружности	105
Четырехугольник, вписанный в окружность	105
Параллелограмм	106
Свойства и признаки параллелограмма	106
Площадь параллелограмма	108
Свойство произвольного четырехугольника, связанное с параллелограммом	108
Ромб	109
Свойства и признаки ромба	109
Окружность, вписанная в ромб	110
Площадь ромба	110
Прямоугольник	111
Свойства и признаки прямоугольника	111
Окружность, описанная около прямоугольника	112
Площадь прямоугольника	112
Связь между прямоугольником и ромбом	112
Квадрат	113
Свойства и признаки квадрата	113
Окружность, описанная около квадрата	114
Окружность, вписанная в квадрат	114
Площадь квадрата	114
Трапеция	115
Элементы трапеции	115
Площадь трапеции	115
Свойства трапеции	116
Окружность	118
Прямые и отрезки, связанные с окружностью	118
Углы, связанные с окружностью. Угловая мера дуги окружности	118
Радийная мера угла	118
Свойства вписанных углов	119
Углы между хордами, касательными и секущими	120
Свойства хорд	121
Соотношения между длинами хорд, отрезков касательных и секущих	122
Свойства дуг и хорд	123
Длина дуги и окружности	123
Площадь круга и его частей	123
Взаимное расположение двух окружностей. Общие касательные	124
Многоугольники	126
Произвольный многоугольник	126
Правильные многоугольники	127
Геометрические места точек	128
Некоторые геометрические места точек на плоскости	128

Преобразования фигур. Виды симметрии	130
Преобразования фигур	130
Виды симметрии фигур	132
Декартовы координаты	133
Уравнение прямой	134
Общее уравнение прямой	134
Уравнение прямой с угловым коэффициентом	135
Взаимное расположение двух прямых, заданных общим уравнением прямой	136
Взаимное расположение двух прямых, заданных уравнением прямой с угловым коэффициентом	137
Уравнение окружности	138
 ВЕКТОРЫ	 139
Обозначения векторов	139
Нулевой вектор	139
Коллинеарные векторы	139
Виды коллинеарных векторов	139
Действия над векторами	140
Сложение двух векторов	140
Сложение нескольких векторов	140
Вычитание векторов	140
Умножение вектора на число	141
Скалярное умножение векторов	141
Координаты вектора на плоскости и в пространстве	142
Действия над векторами в координатном представлении	143
Взаимное расположение векторов	144
Разложение вектора на плоскости по двум неколлинеарным векторам	145
Разложение вектора в пространстве по трем некомпланарным векторам	145
Разложение вектора по координатным векторам	146
 СТЕРЕОМЕТРИЯ	 147
Прямые и плоскости в пространстве	147
Способы задания точки	147
Способы задания прямой	147
Способы задания плоскости	148
Параллельность прямых и плоскостей	149
Параллельные прямые	149
Параллельные прямая и плоскость	149
Параллельные плоскости	150
Перпендикулярность прямых и плоскостей	151
Перпендикулярность плоскостей	152
Перпендикуляр и наклонные	153
Скрещивающиеся прямые	154
Углы в пространстве	155

Призма	156
Площадь поверхности и объем призмы	156
Параллелепипед	157
Пирамида	158
Правильная пирамида	158
Площадь поверхности и объем произвольной пирамиды	159
Площадь поверхности и объем правильной пирамиды	159
Тела вращения	160
Цилиндр	160
Конус	160
Площадь поверхности и объем цилиндра	160
Площадь поверхности и объем конуса	160
Сфера. Шар	161
Вписанные и описанные тела	162
Цилиндр, описанный около призмы	162
Цилиндр, вписанный в призму	162
Конус, описанный около пирамиды	163
Конус, вписанный в пирамиду	163
Шар, описанный около цилиндра	164
Шар, вписанный в цилиндр	165
Шар, описанный около конуса	166
Шар, вписанный в конус	167
Шар, описанный около призмы	168
Шар, вписанный в прямую призму	169
Шар, описанный около правильной пирамиды	170
Шар, вписанный в правильную пирамиду	171
Декартовы координаты	172
Уравнение плоскости	173
Взаимное расположение двух плоскостей	175
Уравнение сферы	176

СПРАВОЧНЫЕ ТАБЛИЦЫ.....177

АЛГЕБРА И НАЧАЛА АНАЛИЗА

ФУНКЦИИ^{*)}

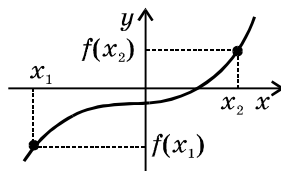
Числовой **функцией** называется соответствие, которое каждому числу X из некоторого заданного множества сопоставляет единственное число Y .

Обозначение: $y = f(x)$, где X — независимая переменная (аргумент функции), Y — зависимая переменная (функция).

Множество значений X называется **областью определения** функции (обычно обозначается D).

Множество значений Y называется **областью значений** функции (обычно обозначается E).

Графиком функции называется множество точек плоскости с координатами $(x, f(x))$.



СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ФУНКЦИЙ

- **Аналитический способ:** функция задается с помощью математической формулы.

Примеры: $y = x^2$, $y = \ln x$

- **Табличный способ:** функция задается с помощью таблицы.

Пример.

x	1	2	3	4	5
y	2	4	6	8	10

- **Описательный способ:** функция задается словесным описанием.

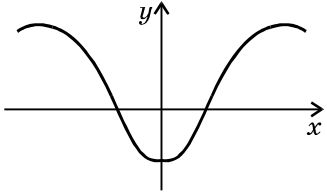
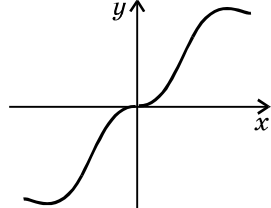
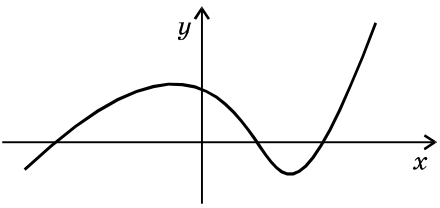
Пример: функция Дирихле $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{для рациональных } x, \\ 0 & \text{для иррациональных } x. \end{cases}$

- **Графический способ:** функция задается с помощью графика.

^{*)} Все параметры функций, в том числе коэффициенты многочленов, считаются действительными.

ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ

ЧЕТНОСТЬ И НЕЧЕТНОСТЬ

Функция называется четной, если: • область определения функции симметрична относительно нуля, • для любого x из области определения $f(-x) = f(x).$  График четной функции симметричен относительно оси y.	Функция называется нечетной, если: • область определения функции симметрична относительно нуля, • для любого x из области определения $f(-x) = -f(x).$  График нечетной функции симметричен относительно начала координат.
Многие функции не являются ни четными, ни нечетными. <i>Пример графика функции, не являющейся ни четной, ни нечетной:</i> 	

Примеры четных функций: $y = x^{2n}$, $n \in \mathbb{Z}$; $y = \cos x$

Примеры нечетных функций: $y = x^{2n+1}$, $n \in \mathbb{Z}$; $y = \sin x$

Примеры функций, не являющихся ни четными, ни нечетными:
 $y = e^x$, $y = \ln x$, $y = x - 2$, $y = (x + 1)^2$

ПЕРИОДИЧНОСТЬ

Функция $f(x)$ называется **периодической** с периодом $T > 0$, если для любого x из области определения значения $x + T$ и $x - T$ также принадлежат области определения и

$$f(x) = f(x + T) = f(x - T).$$

При этом любое число вида Tn , где $n \in \mathbb{N}$, также является периодом этой функции.

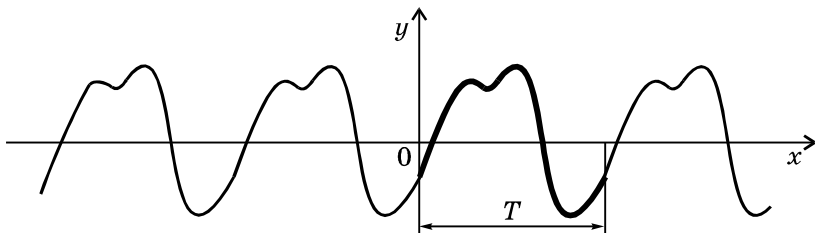


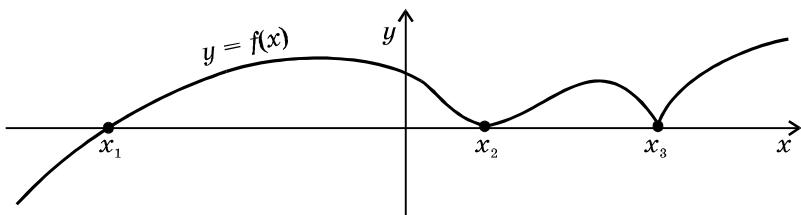
График периодической функции состоит из неограниченно повторяющихся одинаковых фрагментов. Чтобы построить график периодической функции, строят фрагмент графика на любом отрезке длиной T (например, $[0; T]$), а затем производят последовательные параллельные переносы фрагмента графика на T , $2T$, $3T$ и т.д. вдоль оси x (вправо и влево).

НУЛИ ФУНКЦИИ

Нулем функции $y = f(x)$ называется такое значение аргумента x_0 , при котором функция обращается в нуль:

$$f(x_0) = 0.$$

В нуле функции ее график имеет общую точку с осью x .

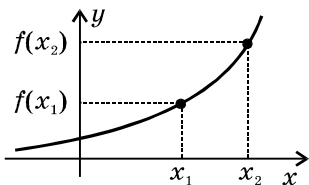


x_1, x_2, x_3 — нули функции $y = f(x)$

МОНОТОННОСТЬ (ВОЗРАСТАНИЕ, УБЫВАНИЕ)

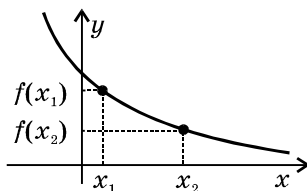
Функция $y = f(x)$ называется **возрастающей** на интервале $(a; b)$, если для любых x_1 и x_2 из этого интервала таких, что $x_1 < x_2$, справедливо неравенство

$$f(x_1) < f(x_2).$$



Функция $y = f(x)$ называется **убывающей** на интервале $(a; b)$, если для любых x_1 и x_2 из этого интервала таких, что $x_1 < x_2$, справедливо неравенство

$$f(x_1) > f(x_2).$$

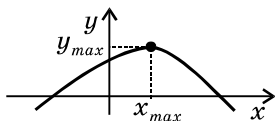


ЭКСТРЕМУМЫ (МАКСИМУМЫ И МИНИМУМЫ)

Внутренняя точка x_{max} области определения называется **точкой максимума**, если для всех x из некоторой окрестности этой точки справедливо неравенство:

$$f(x) < f(x_{max}).$$

Значение $y_{max} = f(x_{max})$ называется **максимумом** этой функции.

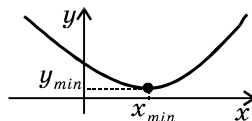


x_{max} — точка максимума
 y_{max} — максимум

Внутренняя точка x_{min} области определения называется **точкой минимума**, если для всех x из некоторой окрестности этой точки справедливо неравенство:

$$f(x) > f(x_{min}).$$

Значение $y_{min} = f(x_{min})$ называется **минимумом** этой функции.

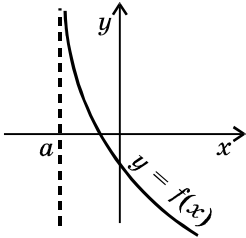


x_{min} — точка минимума
 y_{min} — минимум

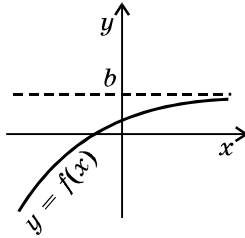
АСИМПТОТЫ

Если график функции $y = f(x)$ имеет бесконечную ветвь (ветви), у графика могут быть асимптоты.

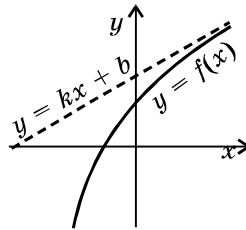
Асимптотой графика называется прямая, к которой неограниченно приближается точка графика при удалении этой точки по бесконечной ветви.



Вертикальная асимптота
 $x = a$



Горизонтальная асимптота
 $y = b$



Наклонная асимптота
 $y = kx + b$

Прямая $x = a$ является **вертикальной асимптотой**, если хотя бы один из пределов $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$ (предел справа) или $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$ (предел слева) равен бесконечности.

Прямая $y = b$ является **горизонтальной асимптотой**, если существуют конечные пределы

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b \text{ или } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b.$$

Прямая $y = kx + b$ является **наклонной асимптотой**, если существуют конечные пределы

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx)$$

либо при $x \rightarrow \infty$, либо при $x \rightarrow -\infty$.

ОБРАТНЫЕ ФУНКЦИИ

Понятие обратной функции применимо к функциям, обладающим следующим свойством: *каждому* значению y из области значений функции соответствует *единственное* значение x из области определения этой функции.

Замечание. Для многих функций это свойство выполняется лишь на части области определения, в частности, на любом промежутке монотонности (для функции $y = x^2$ таким промежутком является, например, луч $[0; \infty)$, для функции $y = \sin x$ — отрезок $[-\pi/2; \pi/2]$).

Функция g называется **обратной** для функции f , если каждому y из области значений функции f функция g ставит в соответствие такое x из области определения функции f , что $y = f(x)$. Таким образом, если $y = f(x)$, то $x = g(y)$.

Функции f и g являются **взаимно обратными**.

- Область определения функции f является областью значений функции g , а область значений функции f является областью определения функции g .
- Графики взаимно обратных функций симметричны друг другу относительно прямой $y = x$ (построение графика обратной функции см. на стр. 23).

Примеры взаимно обратных функций:

$$y = x^3 \text{ и } y = \sqrt[3]{x}, \quad y = 2^x \text{ и } y = \log_2 x$$

НАХОЖДЕНИЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ФУНКЦИИ, ОБРАТНОЙ ДАННОЙ

- Пользуясь формулой $y = f(x)$, следует выразить x через y , а в полученной формуле $x = g(y)$ заменить x на y , а y на x .

Пример. Найти формулу для функции, обратной функции

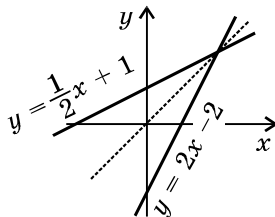
$$y = \frac{1}{2}x + 1.$$

Выражение x через y : $x = 2y - 2$.

Замена x на y , y на x дает: $y = 2x - 2$.

Результат: функция $y = 2x - 2$ является об-

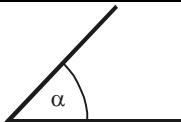
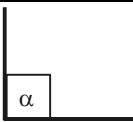
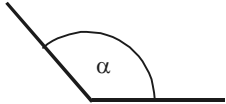
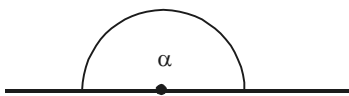
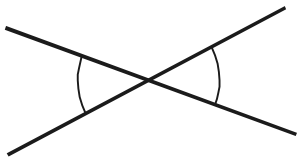
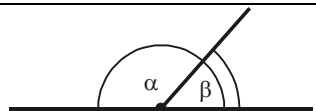
ратной для функции $y = \frac{1}{2}x + 1$.

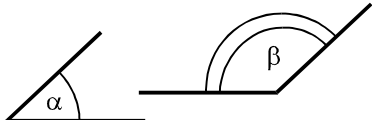
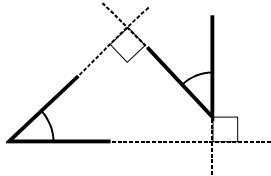
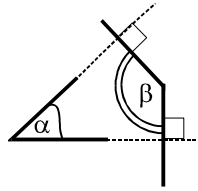


ГЕОМЕТРИЯ

ПЛАНИМЕТРИЯ

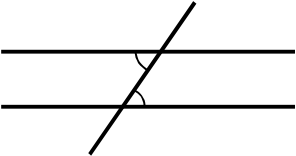
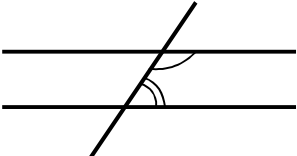
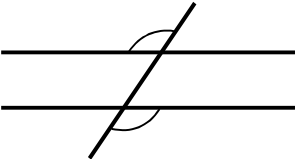
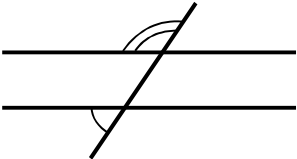
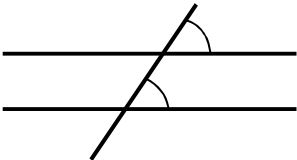
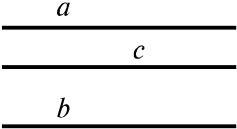
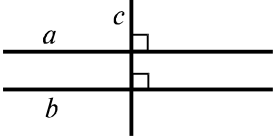
ПРЯМЫЕ И УГЛЫ НА ПЛОСКОСТИ

ВИДЫ УГЛОВ	
 Острый угол $0^\circ < \alpha < 90^\circ$.	 Прямой угол $\alpha = 90^\circ$.
 Тупой угол $90^\circ < \alpha < 180^\circ$.	 Развернутый угол $\alpha = 180^\circ$.
 Вертикальные углы равны.	 Смежные углы составляют в сумме 180°: $\alpha + \beta = 180^\circ$.

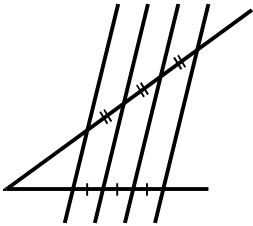
УГЛЫ С СООТВЕТСТВЕННО ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ СТОРОНАМИ	
 Либо равны,	 либо составляют в сумме 180°.
УГЛЫ С СООТВЕТСТВЕННО ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫМИ СТОРОНАМИ	
 Либо равны,	 либо составляют в сумме 180°.

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПРЯМЫЕ

Так называются прямые, которые не пересекаются.

ПРИЗНАКИ И СВОЙСТВА ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПРЯМЫХ	
 Внутренние накрест лежащие углы равны.	 Сумма внутренних односторонних углов равна 180°.
 Внешние накрест лежащие углы равны.	 Сумма внешних односторонних углов равна 180°.
 Соответственные углы равны.	
 Две прямые, параллельные третьей, параллельны: $(a \parallel c, b \parallel c) \Rightarrow a \parallel b$.	 Две прямые, перпендикулярные третьей, параллельны: $(a \perp c, b \perp c) \Rightarrow a \parallel b$.

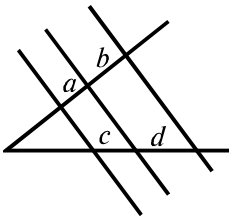
ПРИЗНАКИ И СВОЙСТВА ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПРЯМЫХ (продолжение)



Теорема Фалеса

Если параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают на одной стороне угла равные отрезки, то они отсекают равные отрезки и на другой стороне угла.

Верно и обратное: если некоторые прямые, не пересекающиеся внутри угла, отсекают на одной стороне угла равные между собой отрезки и на другой стороне тоже равные между собой отрезки, то такие прямые параллельны.



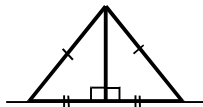
Параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают на сторонах угла пропорциональные отрезки:

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}.$$

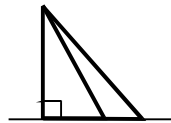
ПЕРПЕНДИКУЛЯР И НАКЛОННЫЕ



Перпендикуляр короче любой наклонной, проведенной к прямой из той же точки.



У равных наклонных, проведенных из одной и той же точки, проекции равны. Верно и обратное: если проекции равны, то равны и наклонные.



Из двух наклонных, проведенных из одной и той же точки, больше та, у которой проекция больше.
Верно и обратное.