

ПРЕДИСЛОВИЕ

*Основные особенности предлагаемого сборника
самостоятельных и контрольных работ:*

1. Сборник содержит *полный набор самостоятельных и контрольных работ по всему курсу геометрии 10 класса*, как основному, так и углубленному.
Контрольные работы рассчитаны на один урок, самостоятельные работы — на 35–45 минут, в зависимости от темы и уровня подготовки учащихся.
Внимание! Поскольку специфика оформления решений геометрических задач во многом зависит от требований учителя, советуем учителям в некоторых работах при необходимости сокращать предлагаемые варианты, ослаблять требования к оформлению решений или проводить работы за 1,5–2 урока.
2. Сборник позволяет осуществить *дифференцированный контроль знаний*, так как задания распределены по *трем уровням сложности А, Б и В*. Уровень А соответствует обязательным программным требованиям, Б — среднему уровню сложности, задания уровня В предназначены для учеников, проявляющих *повышенный интерес к математике, а также для использования в классах, школах, гимназиях и лицеях с углубленным изучением математики*. Для каждого уровня приведено *2 расположенных рядом равноценных варианта* (как они обычно записываются на доске), поэтому на уроке достаточно *одной книги на парте*.
3. В книгу включены *домашние самостоятельные работы*, содержащие творческие, нестандартные задачи по каждой изучаемой теме, а также задачи повышенной сложности. Эти задания могут в полном объеме или частично предлагаться учащимся в качестве зачетных, а также использоваться как дополнительные задания для проведения контрольных работ. По усмотрению учителя выполнение нескольких или даже одного такого задания может оцениваться отличной оценкой.
Ответы к контрольным и домашним самостоятельным работам приводятся в конце книги.
4. Тематика и содержание работ охватывают требования учебников «Геометрия – 10–11» Л. С. Атанасяна и др. и «Геометрия» А. В. Погорелова. Задачи в наборах к каждому из учебников не повторяются, поэтому по каждой теме в книге приведено два варианта работ. Для удобства пользования книгой приводится таблица тематического распределения работ.

С-3. ПРИМЕНЕНИЕ АКСИОМ СТЕРЕОМЕТРИИ И ИХ СЛЕДСТВИЙ В ЗАДАЧАХ НА ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Вариант А1

1

Стороны AB и AC треугольника ABC лежат в плоскости α . Докажите, что и медиана AM этого треугольника лежит в плоскости α .

2

Прямая a лежит в плоскости α . Прямая b пересекает плоскость α в точке B , не лежащей на прямой a . Докажите, что прямые a и b не пересекаются.

3

Докажите, что через две точки можно провести две различные плоскости. Сколько существует таких плоскостей?

Вариант Б1

1

Докажите, что если через прямую a и точку A можно провести единственную плоскость, то $A \notin a$.

2

Из точки A , не лежащей в плоскости α , проведены три луча, пересекающие плоскость α в точках B , C и D . Прямая b пересекает эти лучи в трех различных точках. Докажите, что точки B , C и D лежат на одной прямой.

Вариант А2

1

Точки A , B и C лежат в каждой из двух различных плоскостей. Докажите, что данные точки лежат на одной прямой.

2

Прямые AB и CD не лежат в одной плоскости. Докажите, что прямые AC и BD не пересекаются.

3

Докажите, что через прямую можно провести две различные плоскости. Сколько существует таких плоскостей?

Вариант Б2

1

Докажите, что если через три точки можно провести единственную плоскость, то эти точки не лежат на одной прямой.

2

Плоскость α и плоскость треугольника ABC имеют общую точку A . Точка D — середина отрезка AC . Прямые BC и BD пересекают плоскость α в точках C_1 и D_1 . Докажите, что точки A , C_1 и D_1 лежат на одной прямой.

3

Прямые a и b пересекаются. Докажите, что существует плоскость, содержащая только одну из двух данных прямых. Сколько существует таких плоскостей?

Вариант В 1**1**

Из четырех данных точек одна не лежит в плоскости, определяемой тремя другими. Докажите, что этим свойством обладают и три другие данные точки.

2

Даны плоскости α , β и γ . Докажите, что если линия пересечения плоскостей α и β пересекается с линией пересечения плоскостей α и γ , то плоскости α , β и γ имеют ровно одну общую точку.

3

Три прямые пересекаются попарно, но не имеют общей точки. Докажите, что существует плоскость, пересекающая все три данные прямые. Всякая ли плоскость обладает таким свойством?

3

Прямая a и плоскость α пересекаются. Докажите, что существует плоскость, пересекающая и прямую a , и плоскость α . Сколько существует таких плоскостей?

Вариант В 2**1**

Дано n точек ($n > 4$), среди которых любые четыре лежат в одной плоскости. Докажите, что все n данных точек лежат в одной плоскости.

2

Даны плоскости α , β и γ . Докажите, что если линия пересечения плоскостей α и β пересекает плоскость γ , то плоскости α , β и γ имеют ровно одну общую точку.

3

Три прямые имеют общую точку. Докажите, что существует плоскость, пересекающая все три данные прямые. Всякая ли плоскость обладает таким свойством?

С-5. ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ**Вариант А 1****1**

Плоскость α проходит через осно-

Вариант А 2**1**

Плоскость α проходит через сторо-

вание AD трапеции $ABCD$. Точки E и F — середины отрезков AB и CD соответственно. Докажите, что $EF \parallel \alpha$.

2

В треугольнике ABC на стороне AB выбрана точка D такая, что $BD : BA = 1 : 3$. Плоскость, параллельная прямой AC и проходящая через точку D , пересекает отрезок BC в точке D_1 .

а) Докажите подобие треугольников DBD_1 и ABC .

б) Найдите AC , если $DD_1 = 4$ см.

3

Плоскости α и β пересекаются по прямой c . Плоскость γ , параллельная прямой c , пересекает плоскости α и β по прямым a и b соответственно. Докажите, что $a \parallel \beta$ и $b \parallel \alpha$.

ну AC треугольника ABC . Точки D и E — середины отрезков AB и BC соответственно. Докажите, что $DE \parallel \alpha$.

2

Точка D лежит на отрезке AB , причем $BD : BA = 1 : 4$. Через точку A проведена плоскость α , а через точку D — отрезок DD_1 , параллельный α . Прямая BD_1 пересекает плоскость α в точке C .

а) Докажите подобие треугольников DBD_1 и ABC .

б) Найдите DD_1 , если $AC = 12$ см.

3

Параллельные прямые a и b лежат в плоскости γ . Через прямую a проведена плоскость α , а через прямую b — плоскость β так, что плоскости α и β пересекаются по прямой c . Докажите, что $c \parallel \gamma$.

Вариант Б 1**1**

Точка A лежит в плоскости α , параллельной прямой a . Через точку A проведена прямая b , параллельная прямой a . Докажите, что прямая b лежит в плоскости α .

2

На стороне AD параллелограмма $ABCD$ выбрана точка A_1 так, что $DA_1 = 4$ см. Плоскость, параллельная диагонали AC , проходит через точку A_1 и пересекает сторону CD в точке C_1 .

а) Докажите подобие треугольников C_1DA_1 и ABC .

б) Найдите AC , если $BC = 10$ см, $A_1C_1 = 6$ см.

3

Докажите, что если каждая из двух пересекающихся плоскостей параллельна данной прямой, то линия их пересечения также параллельна этой прямой.

Вариант В 1**1**

Отрезки AA_1 , BB_1 и CC_1 не лежат в одной плоскости и пересекаются в точке O , являющейся серединой каждого из них. Докажите, что прямая AB параллельна плоскости A_1CB_1 .

2

Точка M не лежит в плоскости параллелограмма $ABCD$. На отрезке AM выбрана точка E так, что $ME:EA = 2:3$.

а) Постройте точку F — точку пе-

Вариант Б 2**1**

Прямые a и b параллельны. Через точку B , лежащую на прямой b , проведена плоскость α , параллельная прямой a . Докажите, что плоскость α проходит через прямую b .

2

На стороне BC параллелограмма $ABCD$ выбрана точка C_1 так, что $C_1B = 3$ см. Плоскость, параллельная диагонали AC , проходит через точку C_1 и пересекает сторону AB в точке A_1 .

а) Докажите подобие треугольников ADC и C_1BA_1 .

б) Найдите AD , если $A_1C_1 = 4$ см, $AC = 12$ см.

3

Точка S не лежит в плоскости параллелограмма $ABCD$. Докажите, что линия пересечения плоскостей SAB и SCD параллельна плоскости параллелограмма.

Вариант В 2**1**

Через точку O — точку пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$ — проведена прямая KM , не лежащая в плоскости ABC , причем O — середина отрезка KM . Докажите, что прямая KB параллельна плоскости AMD .

2

Точка M не лежит в плоскости ромба $ABCD$. На отрезке BM выбрана точка F так, что $MF:FB = 1:3$.

а) Постройте точку K — точку пе-

ресечения прямой MB с плоскостью CDE .

б) Найдите AB , если $EF = 10$ см.

3

Плоскости α , β и γ попарно пересекаются. Докажите, что если существует прямая, параллельная двум из данных плоскостей и пересекающая третью плоскость, то плоскости α , β и γ имеют только одну общую точку (рассмотрите три случая взаимного расположения плоскостей).

ресечения прямой MC с плоскостью AFD .

б) Найдите FK , если $AD = 16$ см.

3

Плоскости α , β и γ попарно пересекаются. Докажите, что если не существует прямой, параллельной каждой из данных плоскостей, то плоскости α , β и γ имеют только одну общую точку (рассмотрите три случая взаимного расположения плоскостей).

С-6. СКРЕЩИВАЮЩИЕСЯ ПРЯМЫЕ

Вариант А1

1

Точки A , B , C и D не лежат в одной плоскости. Среди прямых, проходящих через любые две из данных точек, укажите прямую, которая является скрещивающейся

с прямой AB .

с прямой BC .

Ответ обоснуйте.

2

Прямые a и b — скрещивающиеся. Известно, что прямая a

лежит в плоскости α .

параллельна плоскости α .

Определите, может ли прямая b

- а) лежать в плоскости α ;
- б) быть параллельной плоскости α ;
- в) пересекать плоскость α .

Ответы подтвердите чертежами или обоснованиями.

3

Прямая a параллельна плоскости α . Постройте прямую, лежащую в плоскости α и скрещивающуюся с прямой a .

3

Точка A не лежит на прямой a . Постройте прямую, проходящую через точку A и скрещивающуюся с прямой a .

Вариант А2

Вариант Б 1**1**

Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Укажите три прямые, проходящие

через точку D и скрещивающиеся с прямой AB_1 .

через точку B_1 и скрещивающиеся с прямой $A_1 D$.

Дайте обоснование ответа.

2

Сформулируйте утверждение, обратное признаку скрещивающихся прямых. Будет ли оно верным? Почему?

2

Сформулируйте утверждение, обратное теореме о плоскости, проходящей через одну из двух скрещивающихся прямых параллельно другой прямой. Будет ли оно верным? Почему?

3

Даны пересекающиеся прямые a и b и точка C , не принадлежащая им. Постройте прямую, проходящую через точку C и скрещивающуюся с a и b .

3

Даны параллельные прямые a и b и точка C , не принадлежащая им. Постройте прямую, проходящую через точку C и скрещивающуюся с a и b .

Вариант В 1**1**

Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Укажите в данном кубе количество пар

скрещивающихся ребер.

скрещивающихся диагоналей граней.

Дайте обоснование взаимного расположения для одной из этих пар.

2

Плоскости α и β пересекаются по прямой l , которая является скрещивающейся с прямой a . Докажите, что прямая a пересекает хотя бы одну из плоскостей α и β .

2

Плоскости α , β и γ имеют только одну общую точку. Докажите, что любая прямая, параллельная линии пересечения плоскостей α и β , является скрещивающейся хотя бы с одной из двух других прямых пересечения данных плоскостей.

Вариант В 2

3

Прямая a лежит в плоскости α , а прямая b пересекает плоскость α в точке, не лежащей на прямой a . Постройте прямую, проходящую через данную точку пространства M и скрещивающуюся с прямыми a и b . Для любой ли точки M такое построение возможно?

3

Пусть a и b — скрещивающиеся прямые, точка M не лежит ни на одной из них. Постройте прямую, проходящую через точку M и пересекающую a и b . При каком расположении точки M относительно a и b это возможно?

С-7*. НАЧАЛА СТЕРЕОМЕТРИИ В НЕСТАНДАРТНЫХ ВОПРОСАХ И ЗАДАЧАХ (домашняя самостоятельная работа)

Вариант 1

Вариант 2

1

Докажите, что четырехугольник является плоским, если

его диагонали пересекаются.

продолжения двух его противоположных сторон пересекаются.

Верно ли обратное утверждение?

Ответ объясните.

2

$ABCDE$ — замкнутая пространственная ломаная.

Средины четырех ее звеньев лежат в одной плоскости. Лежит ли в этой плоскости середина пятого звена? Ответ объясните.

Средины всех ее звеньев лежат в одной плоскости. Сколько вершин данной ломаной лежит в той же плоскости? Ответ объясните.

3

Через точки B и C , лежащие на прямой l , проведены прямые B_1B и C_1C , перпендикулярные l , причем точки B_1 и C_1 выбраны так, что отрезки B_1B и C_1C равны. Определите, могут ли прямые

BC и B_1C_1

B_1C и C_1B

- а) быть параллельными;
- б) пересекаться;

в) быть скрещивающимися.

Для каждого возможного случая опишите условия, при которых он реализуется.

4

Дана прямая l и точки A и B , не принадлежащие ей. Постройте плоскость, проходящую через A и B и параллельную l . Сколько существует таких плоскостей в зависимости от расположения A, B и l ?

4

Даны прямые a и b и точка C , не принадлежащая им. Постройте плоскость, проходящую через точку C и параллельную a и b . Сколько существует таких плоскостей в зависимости от расположения a, b и C ?

5

Каждая из плоскостей α, β и γ пересекается с двумя другими. Определите, возможно ли в этом случае выполнение следующих условий:

а) любая прямая, пересекающая одну из данных плоскостей, пересекает две другие;

б) любая прямая, параллельная двум данным плоскостям, параллельна третьей плоскости или лежит в ней;

в) существует прямая, пересекающая все три данные плоскости;

г) существует прямая, параллельная двум данным плоскостям и пересекающая третью.

а) любая прямая, пересекающая две данные плоскости, пересекает и третью;

б) любая прямая, параллельная одной из данных плоскостей, параллельна двум другим или лежит хотя бы в одной из них;

в) существует прямая, параллельная всем данным плоскостям;

г) существует прямая, пересекающая две данные плоскости и параллельная третьей.

Утвердительные ответы проиллюстрируйте, отрицательные ответы обоснуйте.

К-1. АКСИОМЫ СТЕРЕОМЕТРИИ. ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТИ

Вариант А1

1

Прямые a и b пересекаются. Прямая c является скрещивающейся с прямой a . Могут ли прямые b и c быть параллельными?

2

Плоскость α проходит через середины боковых стороны AB и CD трапеции $ABCD$ — точки M и N .

- а) Докажите, что $AD \parallel \alpha$.
б) Найдите BC , если $AD = 10$ см, $MN = 8$ см.

3

Прямая MA проходит через вершину квадрата $ABCD$ и не лежит в плоскости квадрата.

- а) Докажите, что MA и BC — скрещивающиеся прямые.
б) Найдите угол между прямыми MA и BC , если $\angle MAD = 45^\circ$.

Вариант Б1

1

Прямая a параллельна плоскости α , а прямая b лежит в плоскости α . Определите, могут ли прямые a и b :

- а) быть параллельными;
б) пересекаться;
в) быть скрещивающимися.

2

Вариант А2

1

Прямые a и b пересекаются. Прямые a и c параллельны. Могут ли прямые b и c быть скрещивающимися?

2

Плоскость α проходит через основание AD трапеции $ABCD$. M и N — середины боковых сторон трапеции.

- а) Докажите, что $MN \parallel \alpha$.
б) Найдите AD , если $BC = 4$ см, $MN = 6$ см.

3

Прямая CD проходит через вершину треугольника ABC и не лежит в плоскости ABC . E и F — середины отрезков AB и BC .

- а) Докажите, что CD и EF — скрещивающиеся прямые.
б) Найдите угол между прямыми CD и EF , если $\angle DCA = 60^\circ$.

Вариант Б2

1

Прямая a параллельна плоскости α , а прямая b пересекает плоскость α . Определите, могут ли прямые a и b :

- а) быть параллельными;
б) пересекаться;
в) быть скрещивающимися.

2

Точка M не лежит в плоскости трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$).

а) Докажите, что треугольники MAD и MBC имеют параллельные средние линии.

б) Найдите длины этих средних линий, если $AD:BC = 5:3$, а средняя линия трапеции равна 16 см.

3

Через вершину A квадрата $ABCD$ проведена прямая KA , не лежащая в плоскости квадрата.

а) Докажите, что KA и CD — скрещивающиеся прямые.

б) Найдите угол между KA и CD , если $\angle AKB = 85^\circ$, $\angle ABK = 45^\circ$.

Треугольник ABC и трапеция $KMNP$ имеют общую среднюю линию EF , причем $KP \parallel MN$, $EF \parallel AC$.

а) Докажите, что $AC \parallel KP$.

б) Найдите KP и MN , если $KP:MN = 3:5$, $AC = 16$ см.

3

Точка M не лежит в плоскости ромба $ABCD$.

а) Докажите, что MC и AD — скрещивающиеся прямые.

б) Найдите угол между прямыми MC и AD , если $\angle MBC = 70^\circ$, $\angle BMC = 65^\circ$.

Вариант В 1

1

Плоскости α и β пересекаются по прямой l . Прямая a параллельна прямой l и является скрещивающейся с прямой b . Определите, могут ли прямые a и b :

а) лежать в одной из данных плоскостей;

б) лежать в разных плоскостях α и β ;

в) пересекать плоскости α и β .

В случае утвердительного ответа укажите взаимное расположение прямых a и b .

2

Плоскость α пересекает стороны AB и BC треугольника ABC в точках M и N соответственно, причем $AM:MB = 3:4$, $CN:BC = 3:7$.

а) Докажите, что $AC \parallel \alpha$.

б) Найдите AC , если $MN = 16$ см.

3

Вариант В 2

1

Плоскости α и β пересекаются по прямой l . Прямые l и a пересекаются, а прямые l и b параллельны. Определите, могут ли прямые a и b :

а) лежать в одной из данных плоскостей;

б) лежать в разных плоскостях α и β ;

в) пересекать плоскости α и β .

В случае утвердительного ответа укажите взаимное расположение прямых a и b .

2

Плоскость α проходит через сторону AC треугольника ABC . Прямая пересекает стороны AB и BC данного треугольника в точках M и N соответственно, причем $BN:NC = 2:3$, $AM:AB = 3:5$.

а) Докажите, что $MN \parallel \alpha$.

б) Найдите MN , если $AC = 30$ см.

3

Точки A , B , C и D не лежат в одной плоскости. Найдите угол между прямыми AC и BD , если $AC = 6$ см, $BD = 8$ см, а расстояние между серединами отрезков AD и BC равно 5 см.

Точки A , B , C и D не лежат в одной плоскости. Найдите угол между прямыми AB и CD , если $AB = CD = 6$ см, а расстояние между серединами отрезков AD и BC равно 3 см.

К-5. ГОДОВАЯ КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА ЗА 10 КЛАСС

Вариант А1

1

Дан прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой $AC = 13$ см и катетом $BC = 5$ см. Отрезок SA , равный 12 см, — перпендикуляр к плоскости ABC .

а) Найдите $|\overline{AS} + \overline{SC} + \overline{CB}|$.

б) Найдите угол между прямой SB и плоскостью ABC .

2

В правильной четырехугольной пирамиде диагональ основания равна $8\sqrt{2}$ см, а двугранный угол при основании равен 60° . Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

3

Постройте сечение куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, проходящее через вершину D и середины ребер AA_1 и $A_1 B_1$. Определите вид многоугольника, полученного в сечении.

Вариант Б1

1

Диагонали ромба $ABCD$ пересекаются в точке O . SA — перпендикуляр к плоскости ромба. $SA = 3\sqrt{3}$ см, $AC = 6$ см, $BD = 8$ см.

а) Докажите, что прямая BD перпендикулярна к плоскости SAO .

б) Найдите $|\overline{SD} + \frac{1}{2}(\overline{DA} + \overline{DC})|$.

Вариант А2

1

Дан прямоугольный треугольник ABC с катетами $AB = 16$ см и $BC = 12$ см. Отрезок SC , равный 20 см, — перпендикуляр к плоскости ABC .

а) Найдите $|\overline{CS} + \overline{SB} + \overline{BA}|$.

б) Найдите угол между прямой SA и плоскостью ABC .

2

В правильной четырехугольной пирамиде высота равна $4\sqrt{3}$ см, а двугранный угол при основании равен 60° . Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

3

Постройте сечение куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, проходящее через прямую AB и середину ребра $B_1 C_1$. Определите вид многоугольника, полученного в сечении.

Вариант Б2

1

Диагонали ромба $ABCD$ пересекаются в точке O . SA — перпендикуляр к плоскости ромба. $AB = 5$ см, $BD = 8$ см, $SO = 6$ см.

а) Докажите перпендикулярность плоскостей SBD и SAO .

б) Найдите $|\frac{1}{2}(\overline{AD} + \overline{AB}) + \overline{OS}|$.

в) Найдите двугранный угол $SDBA$.

2

В правильной треугольной пирамиде плоский угол при вершине равен 120° . Отрезок, соединяющий основание высоты пирамиды с серединой бокового ребра, равен 3 см. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

3

Постройте сечение правильного тетраэдра $DABC$, проходящее через середины ребер AD и BC параллельно ребру DB , и определите вид многоугольника, полученного в сечении.

Вариант В 1

1

Дан равнобедренный прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AC . SB — перпендикуляр к плоскости ABC . Двугранный угол $SACB$ равен 45° .

а) Докажите перпендикулярность плоскостей SBA и SBC .

б) M — точка пересечения медиан треугольника SAC . Разложите вектор \overline{BM} по векторам \overline{BS} , \overline{BA} и \overline{BC} .

в) Найдите углы наклона прямых SA и SC и плоскости ABC .

2

Основание пирамиды — прямо-

в) Найдите угол между прямой SO и плоскостью ABC .

2

В правильной треугольной пирамиде двугранный угол при основании равен 60° . Отрезок, соединяющий основание высоты пирамиды с серединой апофемы, равен 3 см. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

3

Постройте сечение правильного тетраэдра $DABC$, проходящее через середины ребер AD и AB параллельно ребру AC , и определите вид многоугольника, полученного в сечении.

Вариант В 2

1

Дан равнобедренный прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AC . SB — перпендикуляр к плоскости ABC . Прямые SA и SC образуют с плоскостью ABC угол 30° .

а) Докажите перпендикулярность плоскостей SAC и SBD , если D — середина AC .

б) M — точка пересечения медиан треугольника ABC . Разложите вектор \overline{SM} по векторам \overline{SA} , \overline{SB} и \overline{SC} .

в) Найдите двугранный угол $SACB$.

2

Основание пирамиды — прямо-

угольный треугольник с катетом a и противолежащим углом α . Боковые грани пирамиды, содержащие данный катет и гипотенузу основания, перпендикулярны к плоскости основания, а третья боковая грань наклонена к ней под углом β . Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

3

Постройте сечение правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$, проходящее через середины ребер основания AD и CD параллельно боковому ребру SD .

угольный треугольник с гипотенузой c и острым углом α . Боковые грани пирамиды, содержащие катеты основания, перпендикулярны к плоскости основания, а третья боковая грань наклонена к ней под углом β . Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

3

Постройте сечение правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$, проходящее через середины ребра основания AD и бокового ребра SB параллельно прямой AC .