

ОТ АВТОРА

Отношение к математике школьников всегда было неоднозначным, поэтому единый подход к обучению этой науке не реален — необходим дифференцированный подход. Удобно всех учащихся разделить на четыре группы:

1. Любят математику.
2. Уважают математику.
3. Терпят математику как необходимое зло, без которого нельзя получить аттестат зрелости и продолжить далее образование.
4. Не воспринимают математику.

С первой и второй группами все относительно благополучно.

Четвертая группа не так уж мала. О ней должен быть особый разговор, совсем не на страницах этой книги. Замечу только, что причины попадания в четвертую группу могут быть самые разные. Например, ученик музыкальной школы должен упражняться по специальности до шести часов ежедневно. Возможно ли при такой нагрузке вникать еще в синусы и логарифмы с корнями?

В этой книге ориентиры на учеников третьей группы, так что здесь надо сосредоточиться на формировании основных понятий, рассказать о них простым, доступным языком и опираться на простые, геометрически ясные и наглядные соображения. Сложные доказательства опускаются с оговоркой: «В математике это доказано».

Например, понятие степени числа с целым показателем несложно, и правила действия доказываются просто. Все сложности начинаются при обобщении понятия степени числа. И здесь достаточно сказать: «Математики доказали, что любое положительное число можно возвести в любую степень (не только в целую), при этом получается положительное число, которое вычисляется на компьютере, а все правила вычисления со степенями (доказанные для целых показателей степени) полностью сохраняются». Остается сообщить, что при натуральном $n > 1$ степень $a^{1/n}$ называют корнем n -й степени из числа a и обозначают $\sqrt[n]{a}$. Весь традиционный набор упражнений сохраняется, а времени при этом экономится много.

Остановимся на истории реформы курса математики в средней школе.

В середине XIX века произошло вторжение технического прогресса в повседневную жизнь. Это потребовало соответствующих кадров.

Тогда же создатель германской империи Бисмарк сказал: «Основа мощи империи — фельдфебель и школьный учитель».

У нас тоже пришлось обратить внимание на положение в школе — продолжить реформу школьного математического образования, которая была начата в конце XIX века. Практическое же введение начал математического анализа в курс средней школы произошло в начале прошлого века (1910–1913), но было прервано первой мировой войной и революцией. Педагогический корпус страны был обескровлен. Восстановление работы началось к концу 30-х годов, но опять было прервано Великой Отечественной войной. И только в 60-х годах появилась возможность опять поднять этот вопрос.

В конце концов вся тяжесть по руководству и подготовке учебников, программ и остальных материалов выпала на долю Андрея Николаевича Колмогорова — крупнейшего математика XX века. К этой работе была подключена Академия Педагогических наук СССР со всеми ее научно-исследовательскими институтами, а также педагогическо-методическая общественность. Несмотря на значительные силы, привлеченные к решению школьной проблемы, сам Колмогоров много и самоотверженно трудился над учебниками последние двадцать лет своей жизни.

Андрей Николаевич Колмогоров — академик и член многих зарубежных академий, лауреат государственных и международных премий, профессор механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова, заведовавший разными кафедрами факультета в разное время, ставший всемирно известным еще студентом второго курса. Он создал теорию вероятностей как математическую науку, сделал фундаментальные открытия в математике и механике.

В середине 1970-х годов вышло постановление Правительства о переходе ко всеобщему обязательному десятилетнему образованию. Это

резко изменило положение в старших классах: более половины их заполнили учащиеся, не собиравшиеся продолжать обучение. Квалифицированные учителя старшего поколения не смогли работать в создавшейся обстановке и стали массово уходить из школы. Весь фронт



А.Н. Колмогоров (1903–1987)

работы в старших классах был педагогически оголен, и начавшаяся реформа опять была по существу сорвана.

В итоге мы сегодня имеем половинчатое, отрывочно скроенное преподавание элементов математического анализа в школе, преподносимое всем единообразно, за исключением малого процента соответствующих школ и классов.

В книге рассматриваются вопросы, предусмотренные программой курса математики в средней школе: непрерывность функции (отправляясь от наглядных представлений, без формализации); производная функции (до понятия предела функции, традиционные вопросы и упражнения); понятие о пределе функции (отправляясь от наглядных представлений и базируясь на приближенных равенствах о том, что данное приближенное равенство можно получать с любой точностью; определенный интеграл как пример применения приближенных вычислений; традиционный набор упражнений; устанавливается связь предела с непрерывностью функции и ее производной); понятие первообразной (самое элементарное и необходимое для вычисления определенных интегралов). В каждом разделе дан набор упражнений и в конце брошюры — ответы, указания, а к некоторым задачам и решения. Кроме того, есть три приложения, помещенные в конце книги. В первом приложении — доказательства правил вычисления производных в соответствии с определением, данным в книге. Во втором приложении объяснено взаимоотношение определений предела функции данного в брошюре и традиционного. Третье приложение посвящено числу e .

Отдельные материалы пособия опробированы в МГУ им. М.В. Ломоносова, на факультете фундаментальной медицины.

О.С. Ивашев-Мусатов

1. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ

Удивительно, что совершенно простые наблюдения могут привести к очень важным выводам. Вряд ли кто удивится заявлению, что есть линии, которые можно рисовать, не отрывая карандаша от бумаги. Таковы прямая, окружность, ломаная, траектория движущейся точки и т. п. (рис. 1). Обдумывая это замечание и перефразируя его, ученые и инженеры постепенно пришли к математическому анализу, состоящему из дифференциального и интегрального исчислений. В этом пособии разбираются основные факты математического анализа, вошедшие в курс математики средней (базовой) школы.

Обычно все начинается с терминологии, т. е. с того, что как называется. Когда рисуют линию, не отрывая карандаша от бумаги, то движение карандаша не прерывается, поэтому такие линии называют непрерывными. Так, прямая, окружность, ломаная, траектория движущейся точки — непрерывные линии.

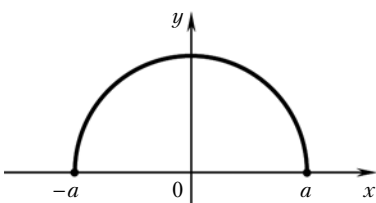


Рис. 2

Если график функции — непрерывная линия, то функцию называют непрерывной. Например, линейная функция $y = kx + b$ непрерывна, так как ее график — прямая непрерывная линия. Функция $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ графиком имеет полуокружность (рис. 2). Это непрерывная линия, поэтому функция

$y = \sqrt{a^2 - x^2}$ непрерывна. Но требуется оговорка: в области определения, т. е. в отрезке $[-a, a]$. Аналогично функция $y = \frac{1}{x}$ (рис. 3) непрерывна на промежутке $(0, \infty)$. Она также непрерывна и на промежутке $(-\infty, 0)$. Но сказать просто: функция $y = \frac{1}{x}$ непрерывна — нельзя, необходимы сделанные оговорки. Их обычно соединяют вместе и говорят: функция $y = \frac{1}{x}$ непрерывна при любом $x \neq 0$.

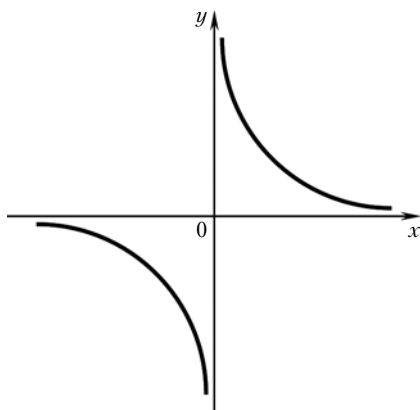


Рис. 3

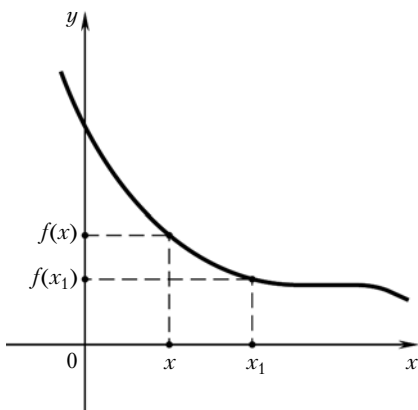


Рис. 4

Со сделанными оговорками приходится говорить: функция f непрерывна на промежутке I , если ее график на этом промежутке есть непрерывная линия. (Примеры приведены выше.)

Из наглядного представления о непрерывности функции следует еще одно: малому изменению аргумента соответствует малое изменение функции. Это легко определить по рисунку 4, на котором изображен график непрерывной функции f и показано, как получаются ее значения в точках x и x_1 — числа $f(x)$ и $f(x_1)$, находящиеся на оси ординат. Из рисунка ясно: чем ближе точка x_1 к точке x , тем ближе точка $f(x_1)$ к точке $f(x)$. Наглядное представление: было значение аргумента функции число x , а число x_1 — это малое изменение аргумента по сравнению с числом x . Соответственные значения функции — числа $f(x)$ и $f(x_1)$, которые мало отличаются от числа $f(x)$ (если x_1 мало отличается от x).

Например, налитая в таз вода испаряется со временем. Следовательно, объем остающейся в тазу воды есть функция времени. Эта функция непрерывна, так как за малый промежуток времени испаряется малый объем воды.

В приведенных упражнениях предполагается, что решение опирается на это наглядное представление о непрерывности функции.

Упражнения

1. На рис. 5 прямая перпендикулярна основанию треугольника. Можно ли считать площадь заштрихованной части функцией от x ? Если да, то будет ли эта функция непрерывной?

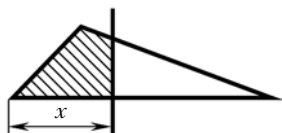


Рис. 5

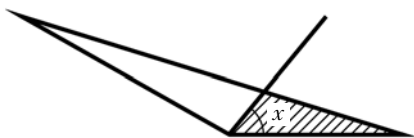


Рис. 6

2. На рис. 6 луч отсекает от треугольника заштрихованную часть. Можно ли считать площадь этой части функцией от x ? Если да, то будет ли эта функция непрерывной?

3. На рис. 7 прямая образует постоянный угол α с основанием прямоугольника (или его продолжением) и отсекает от него многоугольник (или треугольник), заштрихованный на рисунке. Можно ли считать площадь заштрихованной фигуры функцией от x ? Если да, то будет ли эта функция непрерывной?

4. На рис. 8 луч отсекает от прямоугольника заштрихованную фигуру. Можно ли считать площадь этой фигуры функцией от x ? Если да, то будет ли это функция непрерывной?

5. На рис. 9 каждая прямая образует с осью Ox угол α и отсекает от круга сегмент. Можно ли считать площадь этого сегмента функцией от x ? Если да, то будет ли эта функция непрерывной?

6. На рис. 10 луч образует с касательной к окружности угол x рад и отсекает от круга сегмент. Можно ли считать площадь этого сегмента функцией от x ? Если да, то будет ли эта функция непрерывной?

7. Можно ли считать площадь заштрихованной фигуры на рис. 11 функцией от x ? Если да, то будет ли эта функция непрерывной?

8. Можно ли площадь заштрихованной фигуры на рис. 12 считать функцией от x ? Если да, то будет ли эта функция непрерывной?

9. Можно ли считать площадь заштрихованной фигуры на рис. 13 функцией угла φ ? Если да, то будет ли эта функция непрерывной?

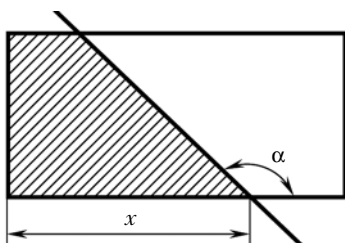
10. Можно ли считать площадь заштрихованной фигуры на рис. 14 функцией угла φ ? Если да, то будет ли эта функция непрерывной?

11. Температура в комнате меняется со временем. Можно ли считать температуру в комнате функцией от времени? Если да, то будет ли эта функция непрерывной?

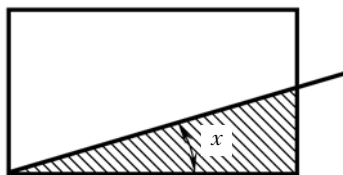
12. Давление атмосферы в комнате меняется со временем. Можно ли считать это давление функцией от времени? Если да, то будет ли эта функция непрерывной?

13. Влажность воздуха в комнате меняется со временем. Можно ли считать эту влажность функцией от времени? Если да, то будет ли эта функция непрерывной?

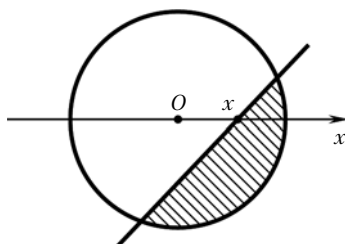
14. В бак с краном налита вода. Кран открыли, и вода начала вытекать, уровень воды стал понижаться. Можно ли считать объем вытекшей воды функцией от времени, за которое она вытекает? Если да, то можно ли считать эту функцию непрерывной?



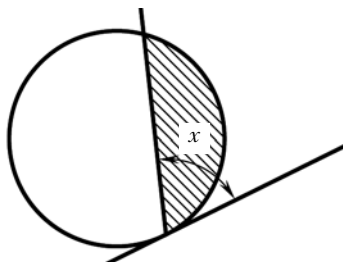
Puc. 7



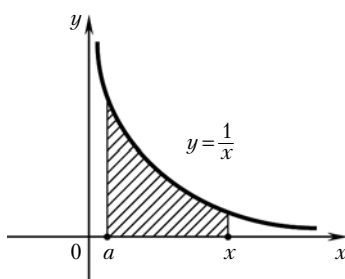
Puc. 8



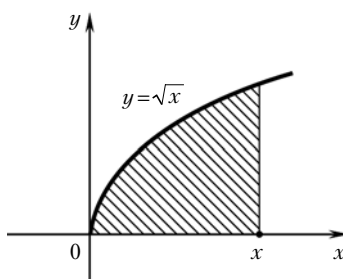
Puc. 9



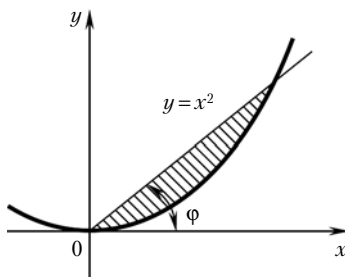
Puc. 10



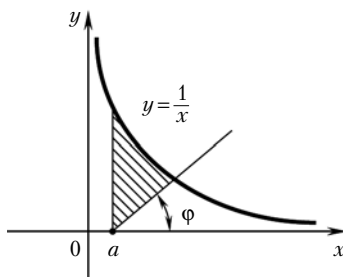
Puc. 11



Puc. 12



Puc. 13



Puc. 14

Математики доказали: все функции, предусмотренные для изучения в средней (базовой) школе, непрерывны в каждом промежутке их областей определения. Так, функция $y = x^2$ (и вообще $y = x^n$ при натуральном показателе степени n) непрерывна на всей числовой прямой, т. е. на промежутке $(-\infty, \infty)$; функция $y = \sqrt{x}$ (и вообще $y = \sqrt[n]{x}$ при натуральном n) непрерывна на промежутке $[0; \infty)$; функции $y = \sin x$ и $y = \cos x$ непрерывны на всей прямой; функция $y = \operatorname{tg} x$ непрерывна на любом интервале вида $\left[-\frac{\pi}{2} + \pi n, \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, где n — любое целое число.

Кроме того, доказано, что сумма, разность и произведение непрерывных функций есть функция непрерывная; частное двух непрерывных функций непрерывно на интервале, на котором знаменатель не обращается в нуль; сложная функция, образованная из непрерывных функций, есть функция непрерывная. Например, $y = ax^2 + bx + c$ — непрерывная функция, как сумма двух непрерывных функций: $y = ax^2$ и $y = bx + c$. Функция $y = \frac{\sin x}{x^2 - 4}$ непрерывна на промежутке $(3; 10)$, так как на этом промежутке непрерывны и числитель, и знаменатель, а знаменатель не обращается в нуль. Функция $y = \cos^5 x$ непрерывна на всей прямой, так как она образована из двух непрерывных (при любых аргументах) функций $y = t^5$ и $t = \cos x$.

Упражнения

15–19. На каких промежутках непрерывны функции:

15. $y = 5x^3 - 4x^2 + x - 7$. **16.** $y = \frac{x+3}{\sqrt{x-1}}$. **17.** $y = x^2 - \frac{3}{x}$.

18. $y = \frac{\cos x}{x^2 + 2}$. **19.** $y = \sqrt{x^2 - 4}$.

Из первоначального представления о непрерывной функции геометрически ясно: если функция f непрерывна на отрезке $[a; b]$ и числа $f(a)$ и $f(b)$ — разных знаков (рис. 15), то между a и b найдется такое число c , что $f(c) = 0$ (таких чисел может оказаться и больше). Коротко это свойство называют «о нуле непрерывной функции». Математики это свойство строго доказали, что оказалось не так просто (хотя на рис. 15 все ясно).

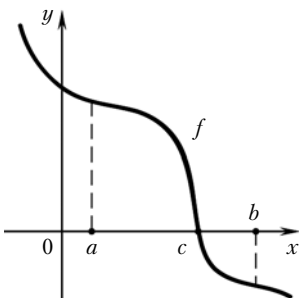


Рис. 15

Первое очевидное применение этого свойства — приближенно решение уравнений. Решим, например, уравнение

$$x^3 - 3x^2 + 1 = 0.$$

Правая его часть есть функция $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$, которая непрерывна на всей прямой. Замечаем, что $f(0) = 1$ и $f(-1) = -3$ — это числа разных знаков, и на отрезке $[-1; 0]$ функция f непрерывна. Следовательно, по свойству о нуле непрерывной функции между 0 и -1 есть корень заданного уравнения. Проверяем середину этого отрезка — точку $-0,5$. $f(-0,5) = 0,125 > 0$, потому между числами -1 и $-0,5$ есть корень заданного уравнения. Проверим точку $-0,6$, получаем $f(-0,6) = -0,236 < 0$. Таким образом, в концах отрезка $[-0,6; -0,5]$ функция f имеет разные знаки и непрерывна на этом отрезке. Следовательно, между $-0,6$ и $-0,5$ есть корень заданного уравнения. Обычно берут полусуммы найденных чисел — число $-0,55$ и его считают приближенно решением заданного уравнения с точностью до $0,05$. Если такая точность мала, то этот процесс продолжают, вычисляя $f(-0,55)$. Есть и более удобные методы решения.

Упражнения

20. Продолжите решение разобранного примера с точностью до $0,005$.

21. Для разобранного примера $f(1) = -1$. Следовательно, на отрезке $[0; 1]$ есть корень заданного уравнения. Найдите его с точностью до $0,005$.

22. Решите приближенно уравнение $2^x = x + 3$ с точностью до $0,05$.

23. Решите приближенно уравнение (при $x > 0$) с точностью до $0,005$:

$$3 \sin x = x - 1.$$

На свойстве о нуле непрерывной функции основан метод интервалов для решения неравенств. Основную роль играет следующая теорема, которую удобно назвать «о сохранении знака непрерывной функции».

Теорема. Если функция непрерывна на интервале и не обращается на нем в нуль, то на всем интервале она или положительна или отрицательна.

Доказательство проведем от противного. Пусть функция f непрерывна на интервале I и при всех x из I функция $f(x) \neq 0$. Предположим, что есть две точки a и b из интервала I такие, что числа $f(a)$ и $f(b)$ разных знаков. Тогда функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, в его концах имеет значения разных знаков, и потому (свойство о нуле непрерывной функции) между a и b есть такое число c , что $f(c) = 0$. Это противоречит условию ($f(x) \neq 0$ при всех x из I), так как точка c принадлежит интервалу I . Теорема доказана.

Например, решим неравенство методом интервалов:

$$\frac{x^2 - 2x}{x^3 + 1} > 0.$$

Левая часть этого неравенства — функция $f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x^3 + 1}$. Она не определена в точке -1 и обращается в нуль в точках 0 и 2 . Эти точки разбивают всю прямую на интервалы $(-\infty; -1)$, $(-1; 0)$, $(0; 2)$ и $(2; \infty)$. На каждом из этих интервалов функция f непрерывна и не обращается в нуль. Следовательно, в каждом интервале функция f сохраняет знак: или на всем интервале положительна, или на всем интервале отрицательна. Для выяснения знака функции f на интервале $(-\infty; -1)$ достаточно

вычислить $f(-2) = \frac{(-2)^2 - 2 \cdot (-2)}{(-2)^3 + 1} = -\frac{8}{7} < 0$, и поэтому функция f на

всем интервале $(-\infty; -1)$ принимает только отрицательные значения: в нем нет решений заданного неравенства. Далее, в интервале $(-1; 0)$

берем точку $-0,5$ и вычисляем $f(-0,5) = \frac{(-0,5)^2 - 2 \cdot (-0,5)}{(-0,5)^3 + 1} = \frac{10}{7} > 0$.

Следовательно, на интервале $(-1; 0)$ функция f принимает только положительные значения, т. е. все числа x из интервала $(-1; 0)$ — решения заданного неравенства. Далее, из интервала $(0; 2)$ берем точку 1

и вычисляем $f(1) = \frac{(1)^2 - 2 \cdot 1}{1^3 + 1} = -\frac{1}{2} < 0$, и потому для всех x из интер-

вала $(0; 2)$ функция f имеет отрицательное значение — в этом интервале нет решений заданного неравенства. Наконец, взяв число 10 из остав-

шегося интервала $(2; \infty)$ и вычисляя

$f(10) = \frac{10^2 - 2 \cdot 10}{1000 + 1} = \frac{80}{1001} > 0$, видим,

что для всех x из интервала $(2; \infty)$

функция f имеет положительные значения, т. е. каждое число x из интервала $(2; \infty)$ есть решение заданного неравенства.

Ответ: решение заданного неравенства — объединение интервалов $(-1; 0)$ и $(2; \infty)$. На рис. 16 ответ изображен графически.



Рис. 16

Упражнения

24–35. Решите неравенства:

24. $\frac{2x - x^2}{x^3 + 8} < 0$. 25. $x^3 - 2x^2 > 3x$. 26. $\frac{x^2 - 2x - 3}{x^3 + 3x^2 - 4x} > 0$.

27. $\frac{1}{x - 2} > \frac{1}{2x + 3}$. 28. $\sqrt{2x + 3} - x < 0$. 29. $\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x - 2} < 0$.

30. $\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x - 2} > 0$. 31. $2^x - 4^x > 0$. 32. $\log_{\frac{1}{2}} x - \log_{\frac{1}{2}}(x^2 + 3) > 2$.

33. $\cos x + \sin 2x > 0$. 34. $\sin x > \cos x$. 35. $\frac{2\sin x + 1}{4\cos^2 x - 1} > 0$.