Содержание

Введение

В пособии рассмотрены уравнения и неравенства вида

$$f(a, b, x) = \varphi(a, b, x), \tag{1}$$

$$f(a, b, x) > \varphi(a, b, x), \tag{2}$$

$$f(a, b, x) \geqslant \varphi(a, b, x), \tag{2a}$$

где a, b, x — переменные величины.

Любую систему значений переменных $a = a_0$, $b = b_0$, $x = x_0$, при которой обе части уравнения (1) или неравенства (2), (2а) принимают действительные значения, называют системой допустимых значений переменных a, b, x.

Переменные a, b, которые при решении уравнения или неравенства считаются постоянными, называют параметрами, а само уравнение (неравенство) называют уравнением (неравенством), содержащим параметры.

Условимся в дальнейшем обозначать параметры первыми буквами латинского алфавита a, b, c, d, .., а неизвестные — последними буквами x, y, z.

Пусть дано уравнение $F(x, a) = 0$. (3)

Если ставится задача отыскать все такие пары (x, a), которые удовлетворяют данному уравнению, то уравнение (3) — это уравнение с двумя переменными x и a.

Если ставится задача для каждого значения a из некоторого числового множества А решить уравнение (3) относительно x, то уравнение (3) называют уравнением с переменной x и параметром a, а множество А — областью изменения параметра.

Решить уравнение с параметром — значит для любого допустимого значения параметра найти множество всех корней заданного уравнения.

Для разбиения множества значений параметра А на подмножества удобно воспользоваться теми значениями параметра, при которых или при переходе через которые происходят качественные изменения уравнения. Такие значения параметра будем называть контрольными.

Вторая постановка задачи: найти все значения параметра a, при каждом из которых решения уравнения или неравенства удовлетворяют заданным условиям.

В процессе решения уравнений существенную роль играют теоремы о равносильности. *Два уравнения, содержащие одни и те же параметры, называют равносильными, если:*

а) они имеют смысл при одних и тех же значениях параметров;

б) каждое решение первого уравнения является решением второго и наоборот.

Приведем формулировки основных теорем о равносильности уравнений.

Теорема 1. **Уравнения $f(a, b, x) = \varphi(a, b, x)$ (1) и $f(a, b, x) + F(a, b, x) = \varphi(a, b, x) + F(a, b, x)$ равносильны, если $F(a, b, x)$ существует в области определения уравнения (1).**

Теорема 2. **Если обе части уравнения $f(a, b, x) = \varphi(a, b, x)$ (1) умножить на выражение $F(a, b, x) = 0$, существующее в области определения уравнения (1), то получим уравнение $f(a, b, x)\ F(a, b, x) = f(a, b, x) \cdot F(a, b, x)$ (4), равносильное данному.**

Теорема 3. **Уравнение $f^n(a, b, x) = \varphi^n(a, b, x)$ (5), где $n \geqslant 2$ (натуральное), равносильно уравнению $f(a, b, x) = \varphi(a, b, x)$.**

1-4

§ 1. Линейные уравнения и уравнения, приводимые к линейным

I **Решите уравнение $2a(a-2)x = a-2$.** **(1)**

Решение

Здесь контрольными будут те значения параметра, при которых коэффициент при x обращается в ноль. Такими значениями являются: $a = 0$ и $a = 2$. Эти значения разбивают множество значений параметра на три подмножества:

1) $a = 0$; 2) $a = 2$; 3) $a \neq 0$, $a \neq 2$.

Рассмотрим эти случаи.

1) При $a = 0$ уравнение (1) принимает вид $0 \cdot x = -2$. Это уравнение не имеет корней.

2) При $a = 2$ уравнение (1) принимает вид $0 \cdot x = 0$. Корнем этого уравнения является любое действительное число.

3) При $a \neq 0$ и $a \neq 2$ из уравнения (1) получаем $x = \dfrac{a-2}{2a(a-2)}$, откуда $x = \dfrac{1}{2a}$.

Ответ:

1) если $a = 0$, то корней нет;

2) если $a = 2$, то x — любое действительное число;

3) если $\begin{cases} a \neq 0, \\ a \neq 2, \end{cases}$ то $x = \dfrac{1}{2a}$.

II **Решите уравнение $\left(a^2-2a+1\right)\cdot x=a^2+2a-3$.**

Решение

Находим контрольные значения параметра a: $a^2-2a+1=0$, $a=1$. Множество значений параметра разбивается на два подмножества:

1) $a=1$; 2) $a\neq 1$.

Решим уравнение на каждом из них.

1) $a=1$; $0\cdot x=0$, $x\in \boldsymbol{R}$.

2) $a\neq 1$; $x=\dfrac{(a+3)\cdot(a-1)}{(a-1)^2}=\dfrac{a+3}{a-1}$.

Ответ:

1) если $a=1$, то $x\in(-\infty;\ +\infty)$;

2) если $a\neq 1$, то $x=\dfrac{a+3}{a-1}$.

III **Решите уравнение $\dfrac{3x-2}{a^2-2a}+\dfrac{x-1}{a-2}+\dfrac{2}{a}=0$.** **(2)**

Решение

Освободимся от знаменателя в уравнении, для этого умножим обе его части на $a\left(a-2\right)\neq 0$.

$3a-2+ax-a+2a-4=0$, $x\,(3+a)=6-a$.

Контрольными значениями будут: $a=0$, $a=2$, $a=-3$.

Рассмотрим решение уравнения на подмножествах:

1) $a=0$; 2) $a=2$; 3) $a=-3$; 4) $\begin{cases} a\neq -3, \\ a\neq 0, \\ a\neq 2. \end{cases}$

1) $a=0$. Уравнение (2) не имеет решений.

2) $a=2$. Уравнение (2) не имеет решений.

3) $a=-3$. $x\cdot 0=6+3=9$, $x\in\varnothing$.

4) $\begin{cases} a \neq -3, \\ a \neq 0, \\ a \neq 2 \end{cases}$ $x = \dfrac{6-a}{3+a}$.

Ответ:

$\varnothing$ при $a = -3$, $a = 0$, $a = 2$; $x = \dfrac{6-a}{3+a}$ при $\begin{cases} a \neq -3, \\ a \neq 0, \\ a \neq 2. \end{cases}$

IV **При всех значениях параметра a решите уравнение**
$\boldsymbol{|x+2| + a|x-4| = 6.}$ **(3)**

Решение

Разобьем числовую прямую на ряд промежутков нулями: $x = -2$, $x = 4$ и рассмотрим решение уравнения (3) на каждом из них.

1) $x < -2$; 2) $-2 \leqslant x < 4$; 3) $x \geqslant 4$.

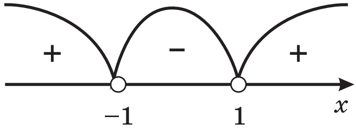
1) $x < -2$. $-x - 2 - ax + 4a = 6$, $x(a+1) = 4a - 8$.

а) $a + 1 = 0$, $a = -1$, $0 \cdot x = -12$; нет решений.

б) $a + 1 \neq 0$, $a \neq -1$, $x = \dfrac{4a-8}{a+1}$. Поскольку $x < -2$,

то $\dfrac{4a-8}{a+1} < -2$, $\dfrac{4a-8}{a+1} + 2 < 0$. $\dfrac{6a-6}{a+1} < 0$. (4)

Решаем неравенство (4) методом интервалов.



Его решение: $-1 < a < 1$. Итак, при $-1 < a < 1$ $x = \dfrac{4a-8}{a+1}$.

2) $-2 \leqslant x \leqslant 4,\ x+2-ax+4a=6,\ x(1-a)=4-4a.$

а) Если $a=1$, то $x \cdot 0=0$; x — любое действительное число, но так как $-2 \leqslant x \leqslant 4$, то при $a=1$ $-2 \leqslant x \leqslant 4$.

б) Если $a \neq 1$, то $x=\dfrac{4(1-a)}{1-a}=4$.

3) $x \geqslant 4.\ x+2+ax-4a=6,\ x(a+1)=4+4a.$

а) $a+1=0,\ a=-1,\ x \cdot 0=0,\ x$ — любое. Поскольку $x \geqslant 4$,

то при $a=-1$ $x \geqslant 4$.

б) $a+1 \neq 0,\ a \neq -1,\ x=4.$

Ответ:

$x=4$ при $a<-1$; $x \geqslant 4$ при $a=-1$; $x_1=4,\ x_2=\dfrac{4a-8}{a+1}$ при $-1<a<1$; $-2 \leqslant x \leqslant 4$ при $a=1$; $x=4$ при $a>1$.

Дидактические материалы

Решите уравнения:

● **А.** 1. $(a^3-a^2-4a+4)x=a-1$;

2. $\dfrac{x}{a}+\dfrac{a}{3}+\dfrac{x+a}{a+3}=1$;

3. $\dfrac{x+a}{1+a}=\dfrac{x-a}{2+a}$.

Решите уравнения:

● **Б.** 1. $\dfrac{2(a+1)x}{a}=3(x+1)+\dfrac{7}{a}$;

2. $\dfrac{a+3}{a+2}=\dfrac{2}{x}-\dfrac{5}{(a+2)x}$;

3. $\dfrac{b-5}{x+1}-\dfrac{7+3b}{x-2}=\dfrac{2bx-5}{x^2-x-2}$.

Решите уравнения:

● **В.** 1. $\dfrac{1}{m-2}-\dfrac{1}{m(m-2)}=\dfrac{2}{(m-2)x}+\dfrac{1}{mx(m-2)}$;

2. $\dfrac{mx-n}{(m-2)n(x-1)}=\dfrac{2}{n(m-2)}+\dfrac{2+3x}{(m-2)(x-1)}$;

3. $(x+1)+a(x-2)=3$.

Ответы:

А. 1. $(-\infty;\ \infty)$ при $a=1$; $\varnothing$ при $a=-2$, $a=2$; $x=\dfrac{1}{a^2-4}$ при $\begin{cases} a\neq 1, \\ a\neq 2, \\ a\neq -2; \end{cases}$

2. $\varnothing$ при $a=-3$, $a=-1{,}5$, $a=0$; $-\dfrac{a\left(a^2+3a-9\right)}{3(2a+3)}$ при $\begin{cases} a\neq -3, \\ a\neq -1{,}5, \\ a\neq 0; \end{cases}$

3. $\varnothing$ при $a=-2$, $a=-1$; $x=-\left(2a^2+3a\right)$ при $\begin{cases} a\neq -2, \\ a\neq -1. \end{cases}$

Б. 1. $\varnothing$ при $a=0$, $a=2$; $x=\dfrac{7+3a}{2-a}$ при $a\neq 0$, $a\neq 2$;

2. $\varnothing$ при $a=-3$, $a=0{,}5$, $a=-2$;
$x=\dfrac{2a-1}{a+3}$ при $a\neq -3$, $a\neq -2$, $a\neq 0{,}5$;

3. $\varnothing$ при $b=-3$, $b=20$, $b=-1\dfrac{3}{13}$;
$x=\dfrac{8-5b}{4(b+3)}$ при $b\neq -3$, $b\neq 20$; $b\neq -1\dfrac{3}{13}$.

В. 1. $\varnothing$ при $m=-0{,}5$, $m=1$, $m=0$, $m=2$;
$x=\dfrac{2m+1}{m-1}$ при $m\neq 2$, $m\neq 0$, $m\neq -0{,}5$, $m\neq 1$;

2. При $m\neq 2$, $n\neq 0$, $m\neq 3n+2$, $m\neq 6n$ $x=\dfrac{3n-2}{m-3n-2}$;
при $m=4$, $n=\dfrac{2}{3}$ $\{x\in \boldsymbol{R}/x\neq 1\}$;
при $m=3n+2$ $\left(n\neq \dfrac{2}{3}\right)$, $m=6n$ $\left(n\neq \dfrac{2}{3}\right)$, $n=0$, $m=2$; решений нет;

3. $x=2$ при $a<1$; $x>2$ при $a=-1$; $x_1=2$, $x_2=\dfrac{2a-4}{a+1}$ при $-1<a<1$; $-1\leqslant x\leqslant 2$ при $a=1$; $x=2$ при $a>1$.

§ 2. Линейные неравенства и неравенства, приводимые к линейным

Каждое из неравенств вида $Ax>B$, $Ax<B$, $AX\geq B$ *или* $AX\leqslant B$, *где* A *и* B *— действительные числа или функции от параметров, а* x *— действительная переменная величина, называют линейным неравенством с одним неизвестным* x.

Например, неравенство $(b-2)x<4b$ — линейное относительно x. При $b=2$ x — любое число, при $b>2$ $x<\dfrac{4b}{b-2}$, при $b<2$ $x>\dfrac{4b}{b-2}$.

I. Решите неравенство $\dfrac{(a+2)x}{a-1}-\dfrac{2}{3}<2x-1$.

По смыслу задачи $a\neq 1$. Преобразуем неравенство:

$$\frac{3ax+6x-2a+2+3a-6ax-3+6x}{3(a-1)}<0,\quad \frac{3x(4-a)+a-1}{3(a-1)}<0. \tag{1}$$

При $a=1$ решений нет.

1) $a-1>0$, т. е. $a>1$, тогда неравенство (1) равносильно неравенству $3x(4-a)+a-1<0$ или $3x(4-a)<1-a$.

   а) $4-a=0$, $a=4$, $x\cdot 0<-3$; решений нет.

   б) $4-a>0$, $a<4$, $x<\dfrac{1-a}{3(4-a)}$, $x<\dfrac{a-1}{3(a-4)}$.

   Отсюда при $1<a<4$ $x<\dfrac{a-1}{3(a-4)}$.

   в) $4-a<0$, $a>4$ $x>\dfrac{a-1}{3(a-4)}$. Тогда при $a>4$ $x>\dfrac{a-1}{3(a-4)}$.

2) $a-1<0$, т. е. $a<1$, неравенство (1) равносильно неравенству $3x(4-a)+a-1>0$ или $3x(4-a)>1-a$. (2)

   а) $4-a=0$, $a=4$, $0\cdot x>-3$, x — любое, но так как $a<1$, то неравенство (2) решений не имеет.

б) $4-a>0,\ a<4,\ x>\dfrac{1-a}{3(4-a)}\Rightarrow x>\dfrac{a-1}{3(a-4)}$.

Учитывая, что $a<1$, получим, что при $a<1$ $x>\dfrac{a-1}{3(a-4)}$.

в) $4-a<0$, $a>4$, но так как $a<1$, то рассматривать неравенство (2) нет смысла.

Ответ:

при $a<1$ и при $a>4$ $x>\dfrac{a-1}{3(a-4)}$; при $1<a<4$ $x<\dfrac{a-1}{3(a-4)}$;
при $a=1$ и при $a=4$ решений нет.

III **Решите неравенство $\dfrac{ax-3}{x-3}-\dfrac{a}{2}<a-1$.** **(3)**

Решение

По смыслу задачи $x\neq 3$.

Преобразуем неравенство (3):

$$\frac{2ax-6-ax+3a+2-2ax-6+6a}{2(x-3)}<0\Leftrightarrow\frac{-ax+9a+2x-12}{2(x-3)}<0,\qquad(4)$$

$$\frac{x(2-a)+9a-12}{2(x-3)}<0.$$

Неравенство (4) равносильно неравенству (3) и сводится к совокупности двух систем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x(2-a)<12-9a, & (4\text{ а})\\ x>3;\end{cases}\\ \begin{cases}(2-a)x>12-9a, & (4\text{ б})\\ x<3.\end{cases}\end{array}\right.$$

Решаем систему (4 а). Рассмотрим первое неравенство $x(2-a)<12-9a$.

1) $a=2$, $x\cdot 0<-6$; нет решений.

2) $2-a>0$, $a<2$, $x<\dfrac{9a-12}{a-2}$.

Итак, при $a<2$ $\begin{cases}x<\dfrac{9a-12}{a-2},\\ x>3.\end{cases}$ (5)

3) $2 - a < 0$, $a > 2$, $x > \dfrac{9a-12}{a-2}$.

Итак, при $a > 2$ $\begin{cases} x > \dfrac{9a-12}{a-2}, \\ x > 3. \end{cases}$ (6)

Для выбора решения каждой из систем сравним величины $\dfrac{9a-12}{a-2}$ и 3.

Для этого рассмотрим разность $\dfrac{9a-12}{a-2} - 3 = \dfrac{6a-6}{a-2} \cdot \dfrac{6a-6}{a-2} < 0$

при $1 < a < 2$. $\dfrac{6a-6}{a-2} > 0$ при $a < 1$ и при $a > 2$, следовательно,

$\dfrac{9a-12}{a-2} < 3$ при $1 < a < 2$; $\dfrac{9a-12}{a-2} > 3$ при $a < 1$ и при $a > 2$.

Тогда следует решение (5) и при $1 < a < 2$ нет решений, при $a < 1$

$3 < x < \dfrac{9a-12}{a-2}$.

Система (6) имеет решение при $a > 2 : x > \dfrac{9a-12}{a-2}$.

Аналогично рассмотрим решение системы (4б). $(2-a)x > 12 - 9a$.

1) $a = 2$, $0 \cdot x > -6$, x — любое число, кроме $x = 3$.

2) $2 - a > 0$, $a < 2$ $x > \dfrac{-12+9a}{-2+a}$.

Итак, при $a < 2$ $\begin{cases} x > \dfrac{-12+9a}{-2+a}, \\ x < 3. \end{cases}$ (7)

3) $2 - a < 0$, $a > 2$, $x < \dfrac{9a-12}{a-2}$.

При $a > 2$ $\begin{cases} x < \dfrac{9a-12}{a-2}, \\ x < 3. \end{cases}$ (8)

Решаем системы (7) и (8), зная, что $\dfrac{9a-12}{a-2} < 3$ при $1 < a < 2$.

Если $a = 1$, $1 - \dfrac{1}{2} < 1 - \dfrac{1}{2}$; решений нет.

$\dfrac{9a-12}{a-2} > 3$ при $a < 1$ и при $a > 2$.

При $1 < a < 2$ система (7) имеет решение $\dfrac{9a-12}{a-2} < x < 3$.

При $a < 1$ система (7) не имеет решений.

При $a > 2$ система (8) имеет решение $x < 3$.

Ответ:

при $a < 1$ $3 < x < \dfrac{9a-12}{a-2}$; при $a = 1$ решений нет;

при $1 < a < 2$ $x \in \left(\dfrac{9a-12}{a-2}; 3\right)$ при $a = 2$ $x \in (-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$;

при $a > 2$ $x \in (-\infty; 3)$ или $x \in \left(\dfrac{9a-12}{a-2}; +\infty\right)$.

III Решите неравенство $|2x - a| \leqslant x + 1$.

Решение

1) $2x - a > 0,\ x > \dfrac{a}{2},\ 2x - a \leqslant x + 1,\ x \leqslant 1 + a.$ $\begin{cases} x > \dfrac{a}{2}, \\ x \leqslant 1 + a. \end{cases}$ (9)

Сравним величины $1 + a$ и $\dfrac{a}{2}$, найдем их разность: $1 + a - \dfrac{a}{2} = \dfrac{a}{2} + 1$;

$\dfrac{a}{2} + 1 > 0$ при $a > -2$; $\dfrac{a}{2} + 1 < 0$ при $a < -2$, $1 + a = \dfrac{a}{2}$ при $a = -2$.

Итак, $1 + a > \dfrac{a}{2}$ при $a > -2$; $1 + a < \dfrac{a}{2}$ при $a < -2$.

Решая систему (9), имеем при $a > -2$ $\dfrac{a}{2} < x \leqslant 1 + a$; при $a < -2$ нет решений.

2) $2x - a \leqslant 0,\ x \leqslant \dfrac{a}{2};\ a - 2x \leqslant x + 1,\ x \geqslant \dfrac{a-1}{3};$ $\begin{cases} x \leqslant \dfrac{a}{2}, \\ x \geqslant \dfrac{a-1}{3}. \end{cases}$ (10)

Сравним величины $\dfrac{a-1}{3}$ и $\dfrac{a}{2}$; $-\dfrac{a-1}{3} + \dfrac{a}{2} = \dfrac{a+2}{6}$; $\dfrac{a}{2} > \dfrac{a-1}{3}$ при $a > -2$; $\dfrac{a}{2} < \dfrac{a-1}{3}$ при $a < -2$.

Решая систему (10), имеем при $a > -2$ $\dfrac{a-1}{3} \leqslant x \leqslant \dfrac{a}{2}$, при $a < -2$ решений нет. Объединяя решения при $a > -2$, получим $\dfrac{a-1}{3} \leqslant x \leqslant 1 + a$.

3) $a=-2$ $\left|2x+2\right|\leqslant x+1,\ 2\left|x+1\right|\leqslant x+1;$

$$\begin{cases}x+1\geqslant 0,\\ 2x+2\leqslant x+1;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geqslant -1,\\ x\leqslant -1;\end{cases}\Leftrightarrow x=-1.$$

Ответ:

При $a<-2$ нет решений; при $a=-2$ $x=-1$; при $a>-2$ $x\in\left[\frac{a-1}{3};\ a+1\right]$.

Дидактические материалы

Решите неравенства:

● **А.** 1. $3(2a-x)<ax+1;$

2. $\dfrac{x}{x-2}<\dfrac{2b+1}{(b-3)(x-2)};$

3. $2ax+\dfrac{a-1}{2}\geqslant(a+2)x.$

● **Б.** 1. $\dfrac{2x-1}{m+1}-\dfrac{x+1}{2(m-1)}>\dfrac{2x-3}{m-1};$

2. $\dfrac{ax}{a-2}-\dfrac{x-1}{3}<\dfrac{2x+3}{4};$

3. $\dfrac{ax+1}{3}+\dfrac{4a-x}{2}<\dfrac{a^2}{6}.$

● **В.** 1. $\dfrac{2x+1}{(a-1)x}-\dfrac{a+5}{a-1}>\dfrac{3}{x};$

2. $\dfrac{m}{mx+1}+\dfrac{1}{mx-1}<\dfrac{1}{1-m^2x^2}$, если $m>0$;

3. $\left|ax+1\right|\leqslant\dfrac{x}{2}.$

Ответы:

А. 1. При $a=-3$ $x\in\boldsymbol{R}$; при $a<-3$ $x<\dfrac{6a-1}{a+3}$; при $a>-3$ $x>\dfrac{6a-1}{a+3}$;

2. При $b>3$ $x\in\left(2;\dfrac{2b+1}{b-3}\right)$; при $b<3$ $x\in\left(\dfrac{2b+1}{b-3};\ 2\right)$; при $b=3$ решений нет;

3. при $a < 2$ $x \in \left(-\infty;\ \dfrac{1-a}{2(a-2)}\right)$; при $a = 2$ $x \in (-\infty;\ +\infty)$;

при $a > 2$ $x \in \left(\dfrac{1-a}{2(a-2)};\ +\infty\right)$.

Б. 1. При $m < -9$ и при $-1 < m < 1$ $x \in \left(\dfrac{7+3m}{m+9};\ +\infty\right)$; при $-9 < m < -1$ и при $m > 1$ $x \in \left(-\infty;\ \dfrac{7+3m}{m+9}\right)$; при $m = -9$ и при $m \neq \pm 1$ решений нет;

2. При $a < -10$ и при $a > 2$ $x \in \left(-\infty;\ \dfrac{5(a-2)}{2(a+10)}\right)$; при $a = -10$ $x \in \boldsymbol{R}$;

при $-10 < a < 2$ $x \in \left(\dfrac{5(a-2)}{2(a+10)};\ +\infty\right)$;

3. При $a > 1{,}5$ $x \in \left(-\infty;\ \dfrac{a^2-12a-2}{2a-3}\right)$; при $a = 1{,}5$ решений нет;

при $a < 1{,}5$ $x \in \left(\dfrac{a^2-12a-2}{2a-3};\ +\infty\right)$.

В. 1) при $a < -3$ и при $a > 1\dfrac{1}{3}$ $x \in \left(\dfrac{4-3a}{a+3}; 0\right)$; при $-3 < a < 1$ $x \in (-\infty; 0)$ или $x \in \left(\dfrac{4-3a}{a+3};\ +\infty\right)$; при $a = -3$ $x \in (-\infty;\ 0)$; при $1 < a < 1\dfrac{1}{3}$ $x \in \left(0;\ \dfrac{4-3a}{a+3}\right)$; при $a = 1\dfrac{1}{3}$ и при $a = 1$ решений нет.

Решение

Приведем неравенство к виду $\dfrac{(a+3)x+3a-4}{(a-1)x} < 0$. При $a = -3$ оно принимает вид: $\dfrac{0x-13}{-4x} < 0$, что верно при $x < 0$. При $a > -3$ получим $\dfrac{x-\frac{4-3a}{a+3}}{(a-1)x} < 0$. Если $-3 < a < 1$, то полученное неравенство равносильно неравенству $\dfrac{x-\frac{4-3a}{a+3}}{x} > 0$. $\dfrac{4-3a}{a+3} < 0$ при $a > \dfrac{4}{3}$ и при $a < -3$; $\dfrac{4-3a}{a+3} > 0$ при $-3 < a < 1\dfrac{1}{3}$; $\dfrac{4-3a}{a+3} = 0$ при $a = 1\dfrac{1}{3}$. Значит, при $-3 < a < 1$ получим:

$x \in \left(\dfrac{4-3a}{a+3};\ +\infty\right)$ или $x \in (-\infty\ ; 0)$. Пусть $a > 1$. В таком случае получим неравенство $\dfrac{x - \dfrac{4-3a}{a+3}}{x} < 0$. Отсюда, если $1 < a < 1\dfrac{1}{3}$, то $x \in \left(0;\ \dfrac{4-3a}{a+3}\right)$. При $a = 1\dfrac{1}{3}$ решений нет. При $a > 1\dfrac{1}{3}$ получим $x \in \left(\dfrac{4-3a}{a+3};\ 0\right)$.

Остается рассмотреть случай $a < -3$.

Исходное неравенство равносильно неравенству $\dfrac{x - \dfrac{4-3a}{a+3}}{(a-1)\,x} > 0$. Так как при этом $a - 1 < 0$, то получим $\dfrac{x - \dfrac{4-3a}{a+3}}{x} < 0$. Отсюда $x \in \left(\dfrac{4-3a}{a+3};\ 0\right)$.

2. $\left(-\infty;\ \dfrac{m-2}{m^2+m}\right) \cup \left(-\dfrac{1}{m};\ \dfrac{1}{m}\right)$ при $0 < m < \dfrac{1}{2}$;

$(-\infty;\ -2) \cup (-2;\ 2)$ при $m = \dfrac{1}{2}$; $\left(-\infty;\ -\dfrac{1}{m}\right) \cup \left(\dfrac{m-2}{m^2+m};\ +\infty\right)$ при $m > \dfrac{1}{2}$.

3. $\left(\dfrac{2}{1-2a};\ -\dfrac{2}{2a+1}\right)$ при $a < -\dfrac{1}{2}$; $\left(\dfrac{2}{1-2a};\ +\infty\right)$ при $-\dfrac{1}{2} \leqslant a < \dfrac{1}{2}$;

$\varnothing$ при $a \geqslant \dfrac{1}{2}$.