ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Программа по математике в средней школе предусматривает, чтобы основные свойства функции были усвоены учащимися до изучения элементов математического анализа. Учебники, предлагая схему исследования функций, отмечают при этом, что наиболее трудным этапом исследования является поиск промежутков монотонности и экстремумов.

Вместе с тем, монотонность – одна из важных характеристик функции. Знание промежутков монотонности функции упрощает построение ее графика и тем самым позволяет судить о других ее свойствах.

С определениями возрастания и убывания функции на промежутках учащиеся знакомятся в основной школе. Они легко справляются с нахождением промежутков монотонности функции, заданной графически. В отдельных случаях могут проверить сам факт монотонности функции в наперед заданном промежутке. Однако, зная определения возрастания и убывания функции, учащиеся не могут найти соответствующие промежутки, так как не знают метода их нахождения. Этот метод появляется только после знакомства с производной. Использование же производной при нахождении промежутков монотонности не раскрывает самой сути возрастания и убывания функции.

Данное учебное пособие отличается тем, что в нем в полной мере реализуется схема исследования алгебраических функций без использования производной. Предлагается способ нахождения промежутков монотонности функции по определению. Этот способ делает возможным получить вспомогательную функцию, которая является производной. В результате, наиболее трудный этап нахождения промежутков возрастания (убывания) оказывается преодолимым до изучения элементов математического анализа.

Открывается много методических возможностей, которые реализуются в настоящей работе. В целом, материал, изложенный в пособии, соответствует школьной программе по математике.

Первая часть содержит традиционные сведения о функциях, их графиках и свойствах. Основное внимание уделяется методам исследования функций, которым соответствуют задания на формирование умений читать графики функций и строить их по заданным свойствам. Реализуется схема исследования основных алгебраических функций с последующим построением графиков. Все пункты снабжены заданиями для самостоятельной работы, на которые даются или ответы, или ответы с решениями, или ответы иллюстрируются соответствующими графиками.

Во второй части приводятся примеры исследования и построения графиков алгебраических функций.

Такая структура позволит учащимся самостоятельно, без помощи учителя, повторить не только свойства алгебраических функций, но и научиться исследовать их. Исследование алгебраических функций в общем виде является исключительно плодотворной подготовкой к решению задач с параметрами, по качеству решения которых определяется глубина знаний и математическая культура абитуриентов. Активное знакомство с материалом данного учебного пособия будет способствовать развитию исследовательских и графических навыков учащихся, их интеллектуальному развитию.

Пособие может использоваться при повторении всего курса по алгебраическим функциям и не только, так как в процессе исследования приходится выполнять тождественные преобразования выражений, решать соответствующие уравнения и неравенства, что положительно скажется при подготовке к ЕГЭ.

Учебное пособие будет полезно учителям математики и учащимся общеобразовательных школ, лицеев, гимназий, а также студентам и преподавателям математических специальностей педагогических вузов.

1. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ И ИХ СВОЙСТВА

1.1. Функции и графики

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФУНКЦИИ

За последние годы в школьных учебниках встречается много различных определений понятия функции. В этих определениях фигурируют такие термины, как зависимость, соответствие, отображение, отношение и т.д. В основе определений понятия функции лежат два подхода: функция трактуется как зависимость между переменными (генетический) и функция трактуется как особый вид соответствия между множествами (логический). Остановимся на следующем определении числовой функции.

Определение. Числовой функцией называется такое соответствие между числовым множеством X и множеством R действительных чисел, при котором каждому числу из множества X сопоставляется единственное число из множества R.

Множество X называют *областью определения* функции и обозначают D_f, где f – функция, заданная на множестве X. Действительное число y, соответствующее числу x из множества X, обозначают $f(x)$ и пишут $y = f(x)$. Переменную x при этом называют *независимой переменной* или *аргументом*, а переменную y – *зависимой переменной* или *функцией*. Множество чисел вида $f(x)$ для всех x из множества X называют *областью значений* функции f и обозначают E_f.

СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ФУНКЦИЙ

Для задания функции необходимо указать числовое множество X и правило, по которому каждому числу x соответствует единственное действительное число y. Функция может задаваться словесным определением, аналитическим выражением, таблицей, графиком, графом.

При *аналитическом* способе задания функции функция задается формулой, устанавливающей, какие операции надо произвести над x, чтобы найти y. Если при этом область определения не указывается, то считают, что областью определения функции является область определения выражения $f(x)$.

Иногда функция задается на различных промежутках различными формулами, например: $f(x)=\begin{cases} -x, \text{ если } -2\leqslant x<0, \\ -x^2, \text{ если } 0\leqslant x<1, \\ x, \text{ если } 1\leqslant x\leqslant 2. \end{cases}$

Эта функция определена на промежутке [–2; 2]. Для вычисления значений функции необходимо учитывать промежуток, в котором находится аргумент.

При *табличном* способе функция задается в виде таблицы. Этот способ применяется в тех случаях, когда область определения состоит из конечного числа значений или очевидно правило, по которому составляется таблица.

Функцию можно задать *графическим* способом. *Графиком* функции является множество таких точек координатной плоскости, которые имеют абсциссу x и ординату $f(x)$ для всех x из множества X.

Из определения функции и ее графика можно легко вывести, что любая прямая, параллельная оси Oy, не может иметь с графиком функции более одной общей точки.

КЛАССИФИКАЦИЯ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

В элементарной математике рассматриваются следующие основные элементарные функции.

1. Постоянная $y = b$ (где b – данное число) или $y=\text{const}$.

2. Степенная функция с рациональным показателем $y = x^r$, где r – рациональное число.

3. Степенная функция с иррациональным показателем $y = x^\alpha$.

4. Показательная функция $y = a^x$ (где a – данное положительное число).

5. Логарифмическая функция $y = \log_a x$ (где a – данное положительное число, не равное 1).

6. Тригонометрические функции: $\sin x$, $\cos x$, $\mathrm{tg} x$, $\mathrm{ctg} x$.

7. Обратные тригонометрические функции: $\arcsin x$, $\arccos x$, $\mathrm{arctg} x$, $\mathrm{arcctg} x$.

Функция называется элементарной, если ее можно задать формулой, составленной при помощи последовательного выполнения арифметических действий и перечисленных основных элементарных функций (1–7).

Функция, которую можно задать при помощи целого выражения (т.е. выражения, составленного из чисел и аргумента, обозначенного буквой) при помощи действий сложения и умножения, называется *целой рациональной функцией*, или *многочленом*. В общем виде многочлен от одного аргумента выражается следующей формулой: $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, где n – некоторое натуральное число (степень многочлена), а $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ – данные числа (коэффициенты).

Функция, которую можно задать при помощи формулы, содержащей только лишь четыре арифметических действия над аргументом и данными числами, называется *рациональной.*

Рациональные функции, не являющиеся целыми (т.е. не многочленами), называются *дробными рациональными*. При помощи тождественных преобразований дробную рациональную функцию можно представить в виде отношения двух многочленов, т.е. в виде алгебраической дроби: $y = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$.

Функция, которую можно задать формулой, содержащей лишь *алгебраические* действия над аргументом и числами (четыре арифметических действия, возведение в целую степень и извлечение корня), называется *алгебраической* (явной) функцией. Всякая рациональная функция является алгебраической. Алгебраическая функция, не являющаяся рациональной, называется *иррациональной*. В формуле, изображающей иррациональную функцию, непременно содержится действие извлечения корня из выражения, содержащего аргумент (возможно возведение в степень с дробным показателем).

Элементарные неалгебраические функции называются *трансцендентными* (элементарными) функциями. Из числа основных элементарных функций трансцендентными являются степенная функция с иррациональным показателем x^{α}, показательная, логарифмическая, тригонометрическая и обратная тригонометрическая функции. Формула, выражающая элементарную трансцендентную функцию, непременно содержит хотя бы одну основную трансцендентную операцию над выражением, содержащим аргумент.

На рис. 1 представлена классификация элементарных функций.

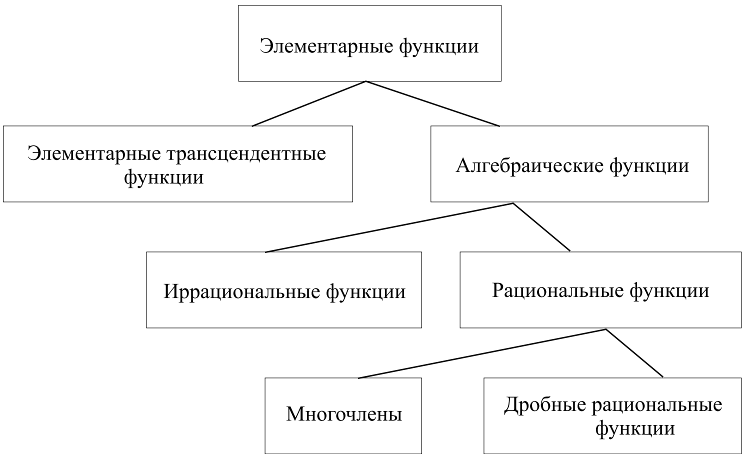


Рис. 1

ЧТЕНИЕ ГРАФИКА

Графический способ задания функции наглядно указывает свойства функции. Установление свойств функции по графику называют *чтением графика.* Чтение графика – это переход от геометрической модели к описанию свойств этой модели.

СВОЙСТВА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

1°. Область определения функции.

Все значения, которые принимает независимая переменная x, образуют *область определения* D_f функции $y = f(x)$. Область определения устанавливается вместе с заданием функции.

2°. Множество значений функции.

Все значения, которые принимает зависимая переменная y, образуют *множество значений* E_f функции $y = f(x)$.

3°. Непрерывность.

Свойство непрерывности функции на промежутке понятно на наглядно-интуитивном уровне – график представляет собой сплошную линию. Поэтому на элементарном уровне вполне оправданно использование термина “непрерывность” как синоним термина “сплошной график”.

4°. Монотонность функции.

Функция $f(x)$ называется *возрастающей* на данном числовом промежутке P, если большему значению аргумента соответствует большее значение функции, т.е. для любых x_1 и x_2 из промежутка P, таких, что $x_2 > x_1$, выполнено неравенство $f(x_2) > f(x_1)$.

Функция $f(x)$ называется *убывающей* на данном числовом промежутке P, если большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции, т.е. для любых x_1 и x_2 из промежутка P, таких, что $x_2 > x_1$, выполнено неравенство $f(x_2) < f(x_1)$.

Функция, только возрастающая или только убывающая на данном числовом промежутке, называется *монотонной* на этом промежутке.

5°. Экстремумы.

Точки $x \in D_f$, в которых возрастание функции сменяется убыванием или, наоборот, убывание сменяется возрастанием, называют соответственно точками *максимума* и *минимума*. В этих точках функция принимает самое большое (*максимум*) или самое маленькое (*минимум*) значение по сравнению со значениями в близких точках.

Точка x_o называется *точкой максимума* функции f, если для всех x из некоторой окрестности x_o выполнено неравенство $f(x) \leqslant f(x_o)$.

Точка x_o называется *точкой минимума* функции f, если для всех x из некоторой окрестности x_o выполнено неравенство $f(x) \geqslant f(x_o)$.

Для точек максимума и минимума функции принято общее название: их называют *точками экстремума.* Значения функции в этих точках называют соответственно *максимумами* и *минимума-*

ми функции (общее название – *экстремумы функции*). Точки максимума обозначают $x_{\max}$, а точки минимума – $x_{\min}$. Значения функции в этих точках обозначаются соответственно $y_{\max}$ и $y_{\min}$.

6°. Нули функции и промежутки знакопостоянства.

Значения аргумента $x \in D_f$, при которых $f(x) = 0$, называются *корнями* (или *нулями*) функции. Значения аргумента, при которых функция обращается в нуль, являются точками пересечения графика функции с осью Ox.

Числовые промежутки, на которых функция сохраняет свой знак (т.е. остается положительной или отрицательной), называются *промежутками знакопостоянства* функции.

7°. Четность.

Функция $y = f(x)$ называется *четной*, если она обладает следующими двумя свойствами:

1) область определения этой функции симметрична относительно точки 0, т.е., если $x \in D_f$, то $-x \in D_f$;

2) для любого $x \in D_f$ выполняется равенство $f(-x) = f(x)$.

Функция $y = f(x)$ называется *нечетной*, если:

1) область определения этой функции симметрична относительно точки 0, т.е., если $x \in D_f$, то $-x \in D_f$;

2) для любого $x \in D_f$ выполняется равенство $f(-x) = -f(x)$.

График четной функции симметричен относительно оси y, а график нечетной функции симметричен относительно начала координат.

Не всякая функция является четной или нечетной. Функции, не обладающие свойствами четности и нечетности, будем называть функциями *общего вида*.

8°. Периодичность.

Функция $f(x)$ называется *периодической*, если существует число $T \neq 0$, такое, что при любом $x \in D_f$ числа $x - T$ и $x + T$ также принадлежат этой области и выполняется равенство $f(x) = f(x - T) = f(x + T)$.

В этом случае число T называют периодом функции f.

Если T – период функции f, то Tk, где $k \in Z$, $k \neq 0$, также период функции f. Следовательно, всякая периодическая функция имеет бесконечное множество периодов. На практике обычно рассматривают наименьший положительный период. Функции, не обладающие свойством периодичности, будем называть функциями *общего вида*.

9°. Наибольшее и наименьшее значения функции.

Функция $y = f(x)$ достигает на множестве D_f своего *наибольшего* значения, если существует такая точка $x_o \in D_f$, что для всех $x \in D_f$ выполняется неравенство $f(x) \leqslant f(x_o)$; в таком случае пишут $f(x_o) = y_{наиб}$.

Функция $y = f(x)$ достигает на множестве D_f своего *наименьшего* значения, если существует такая точка $x_o \in D_f$, что для всех $x \in D_f$ выполняется неравенство $f(x) \geqslant f(x_o)$; в таком случае пишут $f(x_o) = y_{наим}$.

10°. Выпуклость графика функции.

График функции называется *выпуклым вниз* (*вогнутым*) на промежутке P, если отрезок прямой, соединяющий любые две точки графика функции (с абсциссами из P), расположен выше соответствующей части графика (рис. 2 а).

График функции называется *выпуклым вверх* (*выпуклым*) на промежутке P, если отрезок прямой, соединяющий две точки графика функции (с абсциссами из P), расположен ниже соответствующей части графика (рис. 2 б).

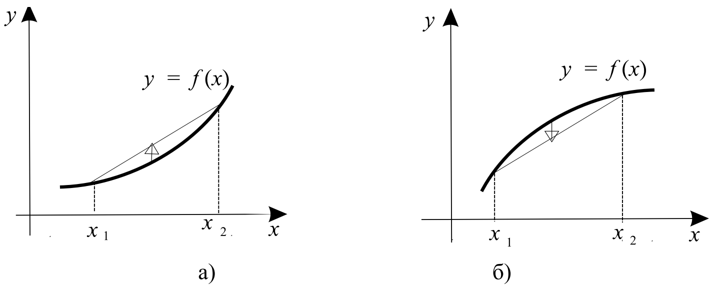


Рис. 2

11°. Асимптоты.

Прямые, к которым неограниченно приближается график функции f, называют *асимптотами.*

На рис. 3, а) прямые $x = x_1$ и $x = x_2$ *вертикальные* асимптоты, а прямая $y = a$ – *горизонтальная* асимптота. На рис. 3, б) ось абсцисс является горизонтальной асимптотой, прямая $x = b$ – вертикальной асимптотой. На рис. 3, в) прямая $y = ax + b$ является *наклонной* асимптотой, ось ординат – *вертикальной* асимптотой.

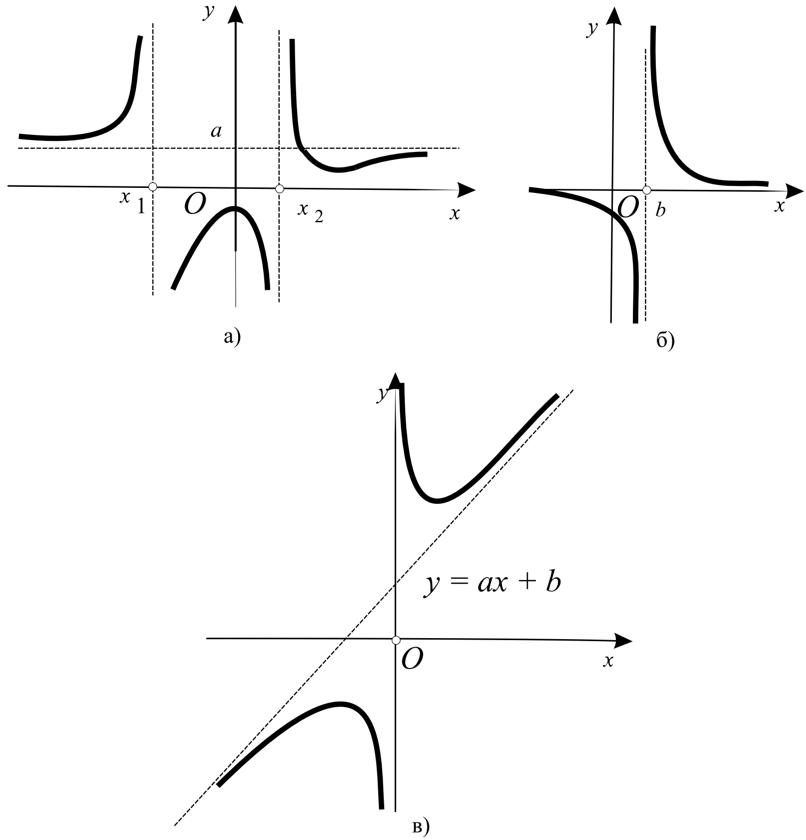


Рис. 3

12°. Ограниченность функции.

Функция f *ограничена снизу*, если весь ее график расположен выше некоторой горизонтальной прямой $y = m$; функция f *ограничена сверху*, если весь ее график расположен ниже некоторой горизонтальной прямой $y = M$; наконец, функция f называется *ограниченной*, если она ограничена и снизу, и сверху.

Если функция f не является ограниченной (ограниченной снизу, ограниченной сверху), то ее называют *неограниченной* (неограниченной снизу, неограниченной сверху).

Упражнения

Определение функции

1. На каких рисунках изображены графики функций? Ответ объясните.

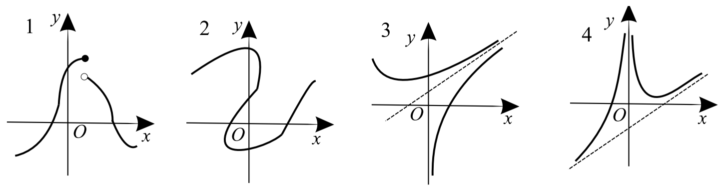


Рис. 4

Чтение графиков

2. Для функций с областью определения R, графики которых изображены на рис. 5 и 6, найдите:

а) множество значений;

б) промежутки возрастания и убывания функции;

в) точки максимума и минимума функции;

г) максимумы и минимумы функции;

д) нули;

е) промежутки знакопостоянства;

ж) наибольшее и наименьшее значения;

з) точки пересечения с осью ординат;

и) асимптоты.

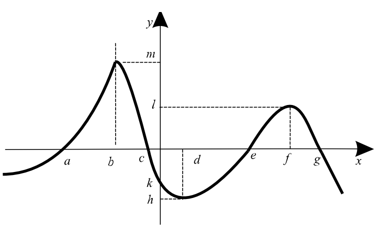


Рис. 5

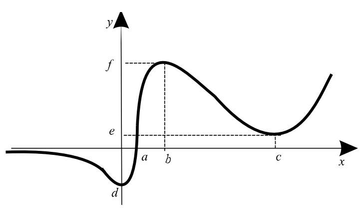


Рис. 6

3. Ниже (рис. 7) представлены графики функций. Укажите те из них, которые обладают заданным свойством.

1) функция принимает значения, равные нулю, ровно при двух значениях x;

2) функция принимает только положительные значения;

3) функция принимает только отрицательные значения;

4) каждое свое значение функция принимает только при одном значении x;

5) чем больше значение x, тем больше значение функции;

6) чем больше значение x, тем меньше значение функции;

7) существует число a, такое, что если x стремится к a слева $(x \to a-0)$ и справа $(x \to a+0)$, то y стремится к бесконечности $(y \to \pm\infty)$;

8) непрерывны.

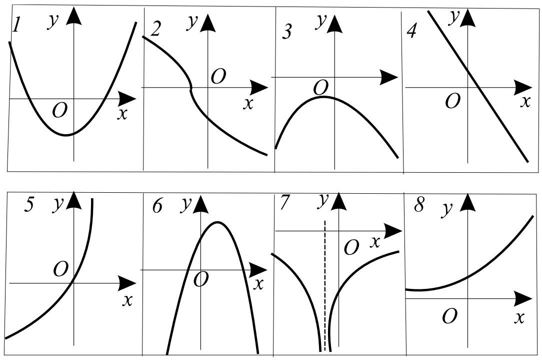


Рис. 7

Построение графиков по заданным свойствам

4. Начертите эскиз графика функции:

1) функция возрастает на промежутке (–∞; –4] и убывает на промежутке [–4; +∞);

2) функция возрастает на промежутках (–∞; –4] и [0; 2], убывает на промежутках [–4; 0] и [2; +∞).

5. Начертите эскиз графика функции:

1) $x_{\min} = -4,\ x_{\max} = 4,\ f(-4) = 2,\ f(4) = 6;$

2) $x_{\min} = -6,\ x_{\min} = 4,\ x_{\max} = 2,\ f(-6) = -4,\ f(2) = 8,\ f(4) = -2.$

6. Начертите эскиз графика функции:

1) график функции имеет горизонтальную асимптоту $y = 2$, вертикальную асимптоту $x = 2$ и убывает в промежутках (–∞; 2) и (2; +∞);

2) график функции имеет горизонтальную асимптоту $y = 2$, вертикальную асимптоту $x = 2$ и возрастает в промежутках $(-\infty; 2)$ и $(2; +\infty)$.

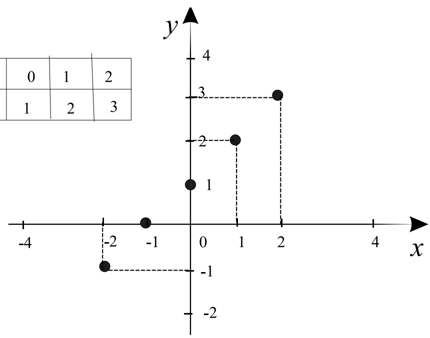
7. Начертите эскиз графика функции:

1) график функции имеет наклонную асимптоту $y = x + 2$, вертикальную асимптоту $x = 0$ и возрастает в промежутках $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$;

2) график функции имеет наклонную асимптоту $y = -x + 2$, вертикальную асимптоту $x = 0$ и убывает в промежутках $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$.

8. Проверьте, что отмеченные точки на координатной плоскости принадлежат графику функции $y = x^3 + 1 - \dfrac{x^2 - 2}{x^2 - 3}$. Попытайтесь начертить по точкам график функции. Полученный результат сверьте с ответом. Сделайте соответствующий вывод.

x	-2	-1	0	1	2
y	-1	0	1	2	3



1.2. Исследование функций

Доказательство свойств функции опирается на соответствующие определения. Если для данной функции $y = f(x)$ доказаны ее свойства, то говорят, что проведено *исследование функции* $y = f(x)$. На основании полученных в результате исследования свойств функции осуществляется построение ее графика.

Рассмотрим способы доказательства наиболее важных свойств функции, заданной с помощью формулы $y = f(x)$, где $f(x)$ – некоторое выражение с переменной.

ОБЛАСТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ФУНКЦИИ

Если функция задана формулой $y = f(x)$ и область определения функции не указана, то считают, что область определения состоит из всех значений независимой переменной, при которых выражение $f(x)$ имеет смысл.

Упражнения

9. Найдите область определения функции:

1) $y = x^{-1}$;
2) $y = \dfrac{x}{x+1}$;
3) $y = (x-2)^{-1}$;
4) $y = (x^2-2)^{-2}$;
5) $y = \sqrt{x-2}$;
6) $y = \sqrt{\dfrac{1}{x-2}}$;
7) $y = \sqrt{\dfrac{x-5}{x+3}}$;
8) $y = \sqrt{x^2-2x-15}$;
9) $y = \sqrt{\dfrac{1}{x^2-2}}$;
10) $y = \sqrt{x^2-2}$;
11) $y = \sqrt{\dfrac{x^2-2x-15}{x}}$;
12) $y = \sqrt{\dfrac{x^2-2x-15}{x^2+2x-15}}$;
13) $y = \sqrt{x^2-2} + \dfrac{1}{\sqrt{x^2-2x-15}}$;
14) $y = \sqrt{x^2-x-20} + \dfrac{1}{\sqrt{14-5x-x^2}}$.

10. В круг радиуса R вписан прямоугольник, одна из сторон которого равна x. Выразите площадь прямоугольника как функцию от x. Найдите область определения этой функции.

11. В равнобедренный треугольник с основанием a и высотой h вписан прямоугольник высотой x. Выразите площадь этого прямоугольника как функцию от x. Найдите область определения этой функции.

12. Из квадрата со стороной a вырезаны по углам квадратики со стороной x и из полученной фигуры сделана открытая коробка. Выразите ее объем как функцию от x. Найдите область определения этой функции.

МНОЖЕСТВО ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИИ

Для нахождения множества значений из формулы $y = f(x)$ выражают x через y: $x = g(y)$ и находят множество всех значений переменной y, при которых выражение $g(y)$ имеет смысл.

Упражнения

13. Функция $y = f(x)$ задана графиком (рис. 8). Укажите множество значений этой функции.

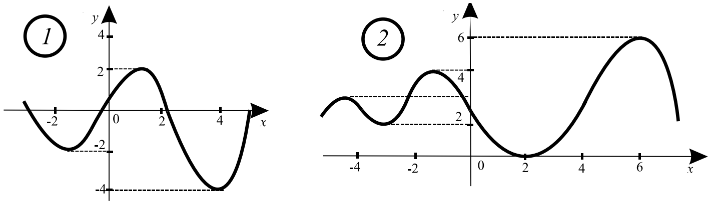


Рис. 8

14. Найдите множество значений функции:

1) $y = 2x + 3$; 2) $y = -5x + 1$;

3) $y = x^2$; 4) $y = -x^2 + 3$;

5) $y = x^2 - 4x$; 6) $y = x^2 - 2x - 3$;

7) $y = \dfrac{2}{x}$; 8) $y = \dfrac{-3}{x+2}$;

9) $y = \dfrac{x+1}{x-3}$; 10) $y = \dfrac{-x+4}{2x+5}$;

11) $y = \dfrac{x^2+2x}{x-3}$; 12) $y = \dfrac{x-3}{x^2+2x}$;

13) $y = \dfrac{1}{x^2-2x-3}$; 14) $y = \dfrac{x}{x^2-2x-3}$;

15) $y = \dfrac{x^2-1}{x^2-3}$; 16) $y = \dfrac{3}{1-x^2}$.

15. Найдите $f(-1), f(-\frac{1}{2}), f(0), f(1), f(3), f(100)$, если

$$f(x) = \begin{cases} x^2, \text{ при } x \in [-2; -1), \\ x, \text{ при } x \in [-1; 1], \\ -x, \text{ при } x \in (1; 5]. \end{cases}$$

Начертите график функции и найдите E_f.

16. Найдите такой квадратный трехчлен $f(x) = ax^2 + bx + c$, что $f(0) = 2$, $f(1) = 3$, $f(2) = 6$. Найдите $E(f)$.

РАЗРЫВ ГРАФИКА ФУНКЦИИ

Если функция задана формулой и не определена в точке x_o, то говорят, что функция имеет разрыв в точке x_o, а точку x_o называют точкой разрыва. При графическом задании функции разрыв возможно установить визуально.

Упражнения

17. Установите точки разрыва графика функции:

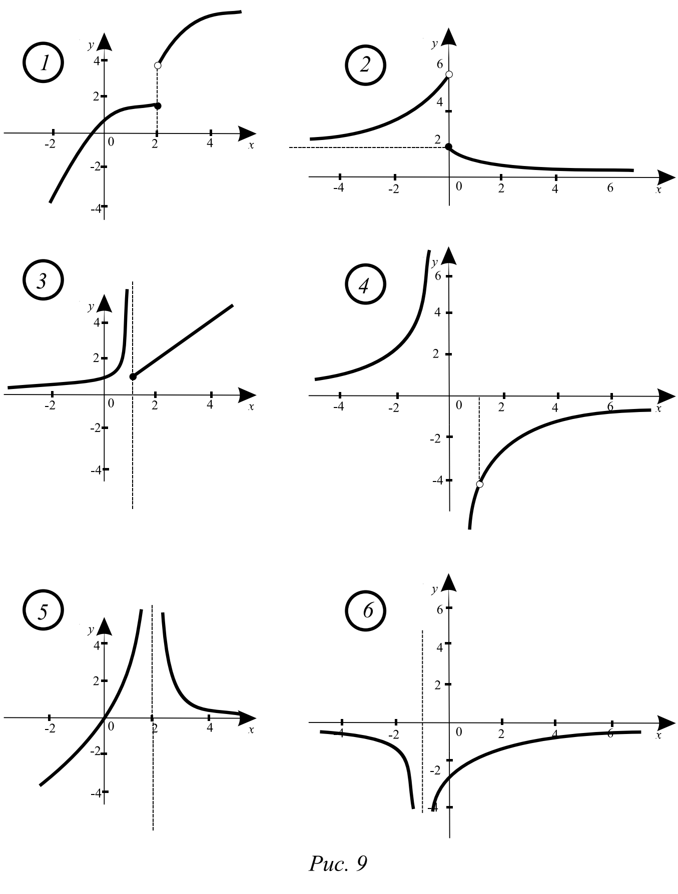


Рис. 9