Комплексная подготовка к ЕГЭ и ГИА (ОГЭ)

Е.П. Нелин

Алгебра

7-11 классы

Определения, свойства,
методы решения задач –
в таблицах

4-е издание, исправленное

ИЛЕКСА
МОСКВА
2023

УДК 373:51
ББК 74.262+22.14
Н49

Нелин Е.П.

Н49 Алгебра. 7–11 классы. Определения, свойства, методы решения задач – в таблицах. Сер. Комплексная подготовка к ЕГЭ и ГИА (ОГЭ). — 4-е изд., испр. — М.: ИЛЕКСА, 2023. – 128 с.: ил.

ISBN 978-5-89237-651-8

Учебное пособие может быть использовано как учениками для повторения школьных курсов алгебры и начал анализа (например, при подготовке к ЕГЭ или ГИА (ОГЭ)), так и учителями на уроке при обобщении той или иной темы, независимо от того, по каким учебникам они работают. В пособии логически упорядочен и систематизирован минимум основных и дополнительных сведений из школьных курсов алгебры и начал анализа, который позволяет решать всевозможные задачи, предлагаемые на выпускных или вступительных экзаменах, а также в заданиях ЕГЭ и ГИА (ОГЭ) по математике.

Для учащихся 7–11 классов общеобразовательных учебных заведений.

УДК 373:51
ББК 74.262+22.14

ISBN 978-5-89237-651-8

СОДЕРЖАНИЕ

Вступление

В пособии логически упорядочен и систематизирован минимум основных и дополнительных сведений из школьных курсов алгебры и начал математического анализа, который позволяет решать самые сложные алгебраические задачи, предлагаемые на выпускных или вступительных экзаменах и в заданиях ЕГЭ или ГИА (ОГЭ) по математике.

Однако ценность этого пособия не только в том, что оно может быть хорошим помощником учащимся при подготовке к экзаменам. Не менее важным является его использование учеником и учителем в повседневной работе в классе и при подготовке к уроку. Как известно, в соответствии с требованиями современных программ материал в учебниках математики структурирован в виде некой последовательности фрагментов разных содержательных линий (линия развития понятия числа — числовые множества, функциональная линия, линия уравнений и неравенств и т. д.), что, безусловно, помогает учащимся осознать связи между ними. Однако обратной стороной такой фрагментарности подачи учебного материала являются трудности, возникающие у детей при понимании как того, какова внутренняя логика развития каждой из указанных выше содержательных линий, так и того, что в целом представляет собой учебный предмет «Алгебра», на освоение которого тратится столько времени и усилий. Эти трудности в значительной мере могут быть устранены при использовании пособия в качестве дополнительного материала в повседневной учебной работе.

Простейшие преобразования графиков функций (по любому учебнику алгебры) удобно рассматривать, например, с использованием таблицы 32, в которой систематизированы и обобщены основные элементарные преобразования функции $y = f(x)$. После рассмотрения примеров, приведенных в таблице, делаются общие выводы, которые также коротко зафиксированы в таблице, а потом рассматриваются более полные формулировки соответствующих свойств, приведенных в учебнике. Желательно также уяснить, что полученные свойства позволяют построить графики функций $y = |f(x)|$ и $y = f(|x|)$ (строки 3 и 4 табл. 32).

Аналогично в курсе «Алгебра и начала математического анализа» свойства и графики показательных и логарифмических функций удобно рассматривать по таблице 38.

Настоящее пособие существенно отличается от других тем, что здесь предлагается систематизировать и обобщить свои знания и умения (например, в решении уравнений и неравенств) с помощью выделения общих схем рассуждений, касающихся решения любых уравнений и неравенств (см., к примеру, табл. 40–43). При этом рассматриваемые схемы связаны в первую очередь с поиском плана решения, а уже потом — с самим решением.

Для удобства работы таблицы сгруппированы по традиционным разделам школьных курсов алгебры и алгебры и начал анализа. Названия этих 9 разделов даны в содержании, помещенном в начале пособия. В конце приведен предметный указатель, позволяющий оперативно определить номера страниц, на которых рассматриваются соответствующие понятия, правила или формулы.

Учебное пособие может быть использовано как учащимися для повторения школьных курсов алгебры и начал математического анализа, так и учителями на уроке при обобщении материала той или иной темы в процессе работы с любым учебником алгебры или алгебры и начал математического анализа для средней школы, например, при подготовке к ЕГЭ и ГИА (ОГЭ) по математике.

Более детально теоретические понятия и методы решения задач, изложенные в таблицах, рассмотрены в учебниках: Нелин Е.П., Лазарев В.А. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений: базовый и профильный уровни. — М.: Илекса, 2011. — 480 с. и Нелин Е.П., Лазарев В.А. «Алгебра и начала математического анализа. 11 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений: базовый и профильный уровни. — М.: Илекса, 2012. — 432 с.

МНОЖЕСТВА И НЕКОТОРЫЕ ОПЕРАЦИИ НАД МНОЖЕСТВАМИ

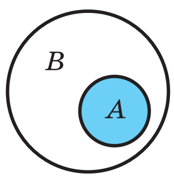
Обозначение

Элемент a принадлежит множеству A	$\Leftrightarrow$	$a \in A$
Элемент b не принадлежит множеству A	$\Leftrightarrow$	$b \notin A$
В множестве нет элементов	$\Leftrightarrow$	$\varnothing$

Понятие множества. Множество можно представить как совокупность некоторых объектов, объединенных по какому-либо признаку. В математике множество — одно из основных неопределяемых понятий.
Каждый объект, входящий в множество A, называют **элементом этого множества.**
Множество, которое не содержит ни одного элемента, называют **пустым множеством** и обозначают $\varnothing$.
Два множества называют **равными,** если каждый элемент первого множества является элементом второго множества и, наоборот, каждый элемент второго множества является элементом первого множества

Подмножество ($\subset$)

$A \subset B$

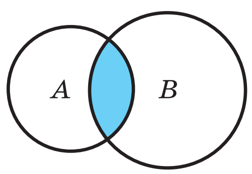


$A \subset B$ $\Leftrightarrow$ Если $x \in A$, то $x \in B$

Если каждый элемент одного множества A является элементом другого множества B, то говорят, что первое множество A является **подмножеством** второго множества B, и записывают так: $A \subset B$.
Используют также запись $A \subseteq B$

Пересечение множеств ($\cap$)

$A \cap B$

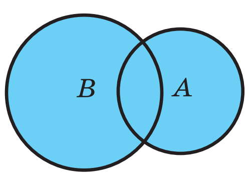


$A \cap B$ $\Leftrightarrow$ $x \in A$ и $x \in B$

Пересечением множеств A и B называют их общую часть, т. е. множество всех элементов, принадлежащих как множеству A, так и множеству B

Объединение множеств ($\cup$)

$A \cup B$



$A \cup B$ $\Leftrightarrow$ $x \in A$ или $x \in B$

Объединением множеств A и B называют множество, составленное из всех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из этих множеств (A или B)

ЧИСЛОВЫЕ МНОЖЕСТВА

Комплексные числа $\boldsymbol{C}$

Числа вида $a + bi$,
где $a, b \in \boldsymbol{R}$, i — мнимая единица, $i^2 = -1$

Действительные числа $\boldsymbol{R}$

Числа, которые можно представить в виде бесконечной десятичной дроби

Мнимые числа

$a + bi$,
где $b \neq 0$

Рациональные числа $\boldsymbol{Q}$

Можно представить в виде несократимой дроби $\frac{m}{n}$, где m — целое, n — натуральное число

Можно представить в виде бесконечной **периодической** десятичной дроби $\left(\frac{1}{3} = 0{,}333\ldots = 0{,}(3)\right)$

Иррациональные числа

Нельзя представить в виде дроби $\frac{m}{n}$, где m — целое, n — натуральное число

Можно представить в виде бесконечной **непериодической** десятичной дроби $\left(\sqrt{2} = 1{,}4142135\ldots\right)$

Целые числа $\boldsymbol{Z}$

Включают натуральные числа, числа, им противоположные, и число 0

$\boldsymbol{Z} = \{0; \pm1; \pm2; \pm3; \pm4; \ldots\}$

Дробные числа

Числа, составленные из целого числа частей единицы

Примеры. $\frac{2}{5}$ — обыкновенная дробь;

$3{,}27$ — десятичная дробь $\left(3{,}27 = \frac{327}{100}\right)$;

$\frac{6}{3}$ — дробное число, значение которого равно целому числу $\left(\frac{6}{3} = 2\right)$

Натуральные числа $\boldsymbol{N}$ (целые положительные)

Для школьного курса математики натуральное число — основное неопределяемое понятие

$\boldsymbol{N} = \{1; 2; 3; 4; \ldots\}$

Число 0

Такое число, что любое число при сложении с ним не меняется:

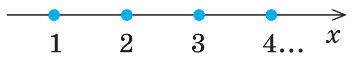
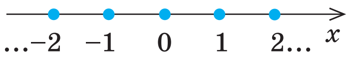
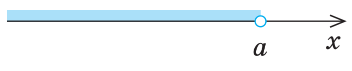
$a + 0 = 0 + a = a$

Целые отрицательные числа

Числа, противоположные натуральным

$$\boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{Z} \subset \boldsymbol{Q} \subset \boldsymbol{R} \subset \boldsymbol{C}$$

ОБОЗНАЧЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ЧИСЛОВЫХ МНОЖЕСТВ

Обозначение	**Изображение**	**Запись с помощью неравенств**	**Словесная формулировка**
$\boldsymbol{N}$			Множество всех натуральных чисел
$\boldsymbol{Z}$			Множество всех целых чисел
$\boldsymbol{Q}$			Множество всех рациональных чисел
$\boldsymbol{R}$		$-\infty < x < +\infty$	Множество всех действительных чисел
$(-\infty;\ +\infty)$			Числовая прямая
$[a;\ b]$		$a \leqslant x \leqslant b$	Закрытый промежуток (отрезок) с концами a и b ($a < b$)
$(a;\ b)$		$a < x < b$	Открытый промежуток (интервал) с концами a и b
$[a;\ b)$		$a \leqslant x < b$	Полуоткрытый промежуток (полуинтервал) с концами a и b
$(a;\ b]$		$a < x \leqslant b$	
$(-\infty;\ a)$		$x < a$	Бесконечный промежуток (луч)
$(-\infty;\ a]$		$x \leqslant a$	
$(a;\ +\infty)$		$x > a$	
$[a;\ +\infty)$		$x \geqslant a$	

ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ЧИСЛОВЫХ РАВЕНСТВ И НЕРАВЕНСТВ

Свойства числовых равенств	**Свойства числовых неравенств**
1. Если $a = b$, то $b = a$	1. Если $a > b$, то $b < a$
2. Если $a = b$ и $b = c$, то $a = c$ (*транзитивность равенства*)	2. Если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$ (*транзитивность неравенства*)
3. Если $a = b$, то $a + c = b + c$	3. Если $a > b$, то $a + c > b + c$
4. Если $a = b$ и $c = d$, то $a + c = b + d$	4. Если $a > b$ и $c > d$, то $a + c > b + d$
5. Если $a = b$ то $ac = bc$	5. а) Если $a > b$ и $c > 0$, то $ac > bc$ б) Если $a > b$ и $c < 0$, то $ac < bc$
6. Если $a = b$ и $c = d$, то $ac = bd$	6. Если $a > b$ $(a > 0,\ b > 0)$ и $c > d$ $(c > 0,\ d > 0)$, то $ac > bd$
7. Если $a = b$, то $a^n = b^n$	7. а) Если $a > b$ $(a > 0,\ b \geqslant 0)$, то $a^{2k} > b^{2k}$ б) Если $a > b$, то $a^{2k+1} > b^{2k+1}$
8. а) Если $a = b$ $(a \geqslant 0,\ b \geqslant 0)$, то $\sqrt[2k]{a} = \sqrt[2k]{b}$ б) Если $a = b$, то $\sqrt[2k+1]{a} = \sqrt[2k+1]{b}$	8. а) Если $a > b$ $(a > 0,\ b > 0)$, то $\sqrt[2k]{a} > \sqrt[2k]{b}$ б) Если $a > b$, то $\sqrt[2k+1]{a} > \sqrt[2k+1]{b}$
9. Если $a = b$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, то $\frac{1}{a} = \frac{1}{b}$	9. Если $a > b$ $(a > 0,\ b > 0)$, то $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$
10. $ab = 0$ тогда и только тогда, когда $a = 0$ или $b = 0$	10. а) $ab > 0$ тогда и только тогда, когда $a > 0$ и $b > 0$ или $a < 0$ и $b < 0$ б) $ab < 0$ тогда и только тогда, когда $a > 0$ и $b < 0$ или $a < 0$ и $b > 0$
11. $\frac{a}{b} = 0$ тогда и только тогда, когда $a = 0$ и $b \neq 0$	11. а) $\frac{a}{b} > 0$ тогда и только тогда, когда $a > 0$ и $b > 0$ или $a < 0$ и $b < 0$ б) $\frac{a}{b} < 0$ тогда и только тогда, когда $a > 0$ и $b < 0$ или $a < 0$ и $b > 0$

НЕКОТОРЫЕ СПЕЦИАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

Определения средних величин

Среднее арифметическое	Среднее геометрическое
$A_n = \dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$ $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — любые числа	$G_n = \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$ $a_1 \geqslant 0;\ a_2 \geqslant 0;\ \ldots;\ a_n \geqslant 0$
Среднее гармоническое	**Среднее квадратичное**
$H_n = \dfrac{n}{\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \ldots + \dfrac{1}{a_n}}$ $a_1 \neq 0;\ a_2 \neq 0;\ \ldots;\ a_n \neq 0,\ \dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \ldots + \dfrac{1}{a_n} \neq 0$	$S = \sqrt{\dfrac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n}}$ $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — любые числа

Общее соотношение между средними величинами

$$\boxed{S \geqslant A_n \geqslant G_n \geqslant H_n}$$

$(a_1 > 0;\ a_2 > 0;\ \ldots;\ a_n > 0)$
причем равенство достигается только при
$a_1 = a_2 = \ldots = a_n$

Неравенство Коши

$$\boxed{\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}}$$

где $a \geqslant 0;\ b \geqslant 0$

$$\boxed{\frac{a+b+c}{3} \geqslant \sqrt[3]{abc}}$$

где $a \geqslant 0;\ b \geqslant 0;\ c \geqslant 0$

...

$$\boxed{\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}}$$

где $a_1 \geqslant 0;\ a_2 \geqslant 0;\ \ldots;\ a_n \geqslant 0$

Среднее арифметическое нескольких неотрицательных чисел не меньше их среднего геометрического. (Равенство достигается только тогда, когда все числа равны между собой.)

Следствия

1. *Если сумма положительных чисел постоянна, то их произведение наибольшее, когда числа равны между собой*
2. *Если произведение положительных чисел постоянно, то их сумма наименьшая, когда числа равны между собой*

Оценка суммы двух взаимно обратных чисел

Если $a > 0$, то	Если $b < 0$, то
$\boxed{a + \dfrac{1}{a} \geqslant 2}$	$\boxed{b + \dfrac{1}{b} \leqslant -2}$
Сумма двух взаимно обратных положительных чисел больше или равна 2 (причем равенство достигается только при $a = 1$)	*Сумма двух взаимно обратных отрицательных чисел меньше или равна −2 (причем равенство достигается только при $b = -1$)*

Оценка суммы квадратов трех чисел

$\boxed{a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + ac + bc}$ для любых a, b, c

Неравенство Бернулли

Для любого действительного числа $a > 0$ и любого рационального $r > 1$

$$\boxed{(1 + a)^r > 1 + ra}$$

Неравенство Коши–Буняковского

Для любых действительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и $b_1, b_2, \ldots, b_n$

$$\boxed{(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)^2 \leqslant \left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2\right)\cdot\left(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2\right)}$$

Равенство достигается тогда и только тогда, когда числа a_i и b_i пропорциональны. (Если эти числа не равны нулю, то $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n}$. Если какие-либо из этих чисел равны нулю, то пропорциональность означает, что существует такое число $\lambda \neq 0$, что $a_1 = \lambda b_1$, $a_2 = \lambda b_2$, …, $a_n = \lambda b_n$.)

Методы доказательства неравенств

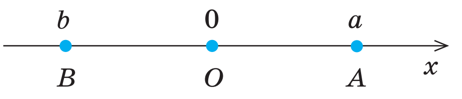
1. *Составление разности левой и правой частей неравенства (если разность положительна, то левая часть больше правой)*	**Пример.** Доказать неравенство $a^3 + b^3 \geqslant ab\,(a + b)$, если $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$. *Решение.* $a^3 + b^3 - ab\,(a + b) = a^3 - a^2b - ab^2 + b^3 = a^2\,(a - b) - b^2\,(a - b) = (a - b)\,(a^2 - b^2) = (a - b)^2\,(a + b) \geqslant 0$ (так как при $a \geqslant 0$ и $b \geqslant 0$ $a + b \geqslant 0$ и $(a - b)^2 \geqslant 0$). Следовательно, $a^3 + b^3 \geqslant ab\,(a + b)$
2. *Использование известных специальных неравенств* (табл. 5) *и свойств числовых неравенств* (табл. 4), *в частности усиление неравенства с использованием транзитивности*	**Пример.** Доказать неравенство $(a + b)\,(b + c)\,(a + c) \geqslant 8abc$, если $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $c \geqslant 0$. *Решение.* Запишем неравенство Коши (см. выше) для неотрицательных чисел a и b, b и c, a и c: $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$, $\frac{b+c}{2} \geqslant \sqrt{bc}$, $\frac{a+c}{2} \geqslant \sqrt{ac}$. Перемножив почленно эти неравенства (с неотрицательными членами!), получаем $\frac{(a+b)(b+c)(a+c)}{8} \geqslant \sqrt{a^2b^2c^2}$. Умножая обе части этого неравенства на положительное число 8 и учитывая, что $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $c \geqslant 0$, получаем $(a + b)\,(b + c)\,(a + c) \geqslant 8abc$
3. *Использование возрастания или убывания соответствующих функций и использование производной* (определение и свойства производной см. в табл. 72–77)	**Пример.** Доказать неравенство $\ln x \leqslant x - 1$ при $x \geqslant 1$. *Решение.* Рассмотрим функцию $f(x) = \ln x - x + 1$. $f'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x} < 0$ при $x > 1$. Следовательно, $f(x)$ убывает на $(1; +\infty)$ (а так как $f(x)$ непрерывна в точке 1, то она убывает и на $[1; +\infty)$). Поскольку $f(1) = 0$, значит, при $x > 1$ $f(x) < f(1) = 0$. При $x = 1$ данное неравенство превращается в равенство. Итак, $\ln x - x + 1 \leqslant 0$, т. е. $\ln x \leqslant x - 1$ при $x \geqslant 1$

МОДУЛЬ ЧИСЛА И ЕГО СВОЙСТВА

Определение	**Примеры**
Модулем положительного числа называют само это число; модулем отрицательного числа называют число, ему противоположное; модуль нуля равен нулю	$\lvert -3 \rvert = 3$; $\lvert 5 \rvert = 5$; $\lvert 0 \rvert = 0$; $\lvert a^4 \rvert = a^4$ (поскольку $a^4 \geqslant 0$)

$$|a| = \begin{cases} a \text{ при } a > 0 \\ 0 \text{ при } a = 0 \\ -a \text{ при } a < 0 \end{cases} = \begin{cases} a \text{ при } a \geqslant 0 \\ -a \text{ при } a < 0 \end{cases} = \begin{cases} a \text{ при } a > 0 \\ -a \text{ при } a \leqslant 0 \end{cases} = \begin{cases} a \text{ при } a \geqslant 0 \\ -a \text{ при } a \leqslant 0 \end{cases}$$

Геометрический смысл модуля



$\boxed{|a| = OA;\ |b| = OB}$

$\boxed{|a - b| = AB}$

На координатной прямой модуль — это расстояние от начала координат до точки, изображающей данное число

Модуль разности двух чисел a и b — это расстояние между точками a и b на координатной прямой

Свойства модуля

1.	$\boxed{\lvert a \rvert \geqslant 0}$	Модуль любого числа — неотрицательное число
2.	$\boxed{\lvert -a \rvert = \lvert a \rvert}$	Модули противоположных чисел равны
3.	$\boxed{a \leqslant \lvert a \rvert}$	Величина числа не превышает величину его модуля
4.	$\boxed{\lvert a \cdot b \rvert = \lvert a \rvert \cdot \lvert b \rvert}$	*Модуль произведения равен произведению модулей сомножителей*
5.	$\boxed{\left\lvert \frac{a}{b} \right\rvert = \frac{\lvert a \rvert}{\lvert b \rvert} \quad (b \neq 0)}$	*Модуль дроби равен модулю числителя, деленному на модуль знаменателя (если знаменатель не равен нулю)*
6.	$\boxed{\lvert a^n \rvert = \lvert a \rvert^n}$	7. $\boxed{\lvert a \rvert^2 = a^2}$ 8. $\boxed{\lvert a \rvert^{2k} = a^{2k}}$
9.	$\boxed{\lvert a + b \rvert \leqslant \lvert a \rvert + \lvert b \rvert}$ $\boxed{\lvert a_1 + a_2 + \dots + a_n \rvert \leqslant \lvert a_1 \rvert + \lvert a_2 \rvert + \dots + \lvert a_n \rvert}$	Модуль суммы не превышает сумму модулей слагаемых
10.	$\boxed{\lvert \lvert a \rvert - \lvert b \rvert \rvert \leqslant \lvert a \pm b \rvert \leqslant \lvert a \rvert + \lvert b \rvert}$	

Таблица 7

ДЕЛИМОСТЬ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ

Определение. Целое число a делится на целое число b ($b \neq 0$), если существует такое целое c, что $a = bc$.	**Обозначение** $\boxed{a \text{ делится на } b} \Leftrightarrow \boxed{a \vdots b}$
В этом случае b называют **делителем** числа a, в число a — **кратным** числа b	$\boxed{\begin{matrix} a \vdots b \\ a, b \in \boldsymbol{Z}, b \neq 0 \end{matrix}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{matrix} \text{существует } c \in \boldsymbol{Z} \\ a = bc \end{matrix}}$

Свойства

1. Если $\boldsymbol{a \vdots b}$ и $\boldsymbol{a > 0}$, то $\boldsymbol{a \geqslant b}$	4. Если $\boldsymbol{a \vdots b}$ и $\boldsymbol{b \vdots c}$, то $\boldsymbol{a \vdots c}$ *(транзитивность деления)*
2. Если $\boldsymbol{a \vdots b}$ и $\boldsymbol{b \vdots a}$ ($a > 0$, $b > 0$), то $\boldsymbol{a = b}$	5. Если $\boldsymbol{a \vdots b}$ и $\boldsymbol{k \neq 0}$, то $\boldsymbol{ak \vdots bk}$
3. Если $\boldsymbol{a \vdots c}$ и $\boldsymbol{b \vdots c}$, m и n — любые целые числа, то $\boldsymbol{(ma + nb) \vdots c}$. **Частный случай** ($m = 1$, $n = \pm 1$) Если $\boldsymbol{a \vdots c}$ и $\boldsymbol{b \vdots c}$, то $\boldsymbol{(a \pm b) \vdots c}$. Если каждое слагаемое делится на c, то их алгебраическая сумма также делится на c	6. Если $\boldsymbol{a \vdots b}$ и $\boldsymbol{a \vdots c}$, причем $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ — **взаимно простые** числа (т. е. их НОД равен единице), то $\boldsymbol{a \vdots bc}$. **Пример.** 48 делится на 3 и на 8 (3 и 8 — взаимно простые числа). Тогда 48 делится на $3 \cdot 8 = 24$

Таблица 8

ПРОСТЫЕ И СОСТАВНЫЕ ЧИСЛА. ПРОСТЫЕ ДЕЛИТЕЛИ

Определение Натуральное число p называется **простым**, если у него только два натуральных делителя: 1 и само число. 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, ... — простые числа. *Простых чисел бесконечно много*	**Определение** Натуральное число называется **составным**, если оно имеет более двух натуральных делителей. 6, 15, 130, 998, ... — составные числа

1 не является ни простым числом, ни составным

Свойства простых делителей натуральных чисел

1. Всякое натуральное число (большее единицы) или делится на данное простое число p, или является взаимно простым с ним

2. ***Если произведение нескольких сомножителей делится на простое число p, то по крайней мере один из сомножителей делится на p***

3. *Наименьший простой делитель составного числа a не превышает $\sqrt{a}$.*

Пример. Наименьший простой делитель числа 143 равен 11 ($143 = 11 \cdot 13$), причем $11 < \sqrt{143} \approx 11{,}96$

Следствие

Если данное число q не делится ни на одно из простых чисел 2, 3, 5, ..., p, где $p \leqslant \sqrt{q}$, то это число q — простое

Пример. Пусть $q = 113$, тогда $\sqrt{113} \approx 10$. Все простые числа $p \leqslant \sqrt{113}$ — это 2, 3, 5, 7. Так как 113 не делится ни на одно из этих простых чисел, то оно само простое

Основная теорема теории делимости

Всякое натуральное число, большее единицы, можно разложить на произведение простых чисел, причем это разложение единственное с точностью до порядка сомножителей.

$\boldsymbol{a = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_m}$,
где $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_m$ — простые числа

Запись $\boxed{a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}}$

— **каноническое разложение числа a**

($p_1, p_2, \ldots, p_k$ — простые числа;
$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ — натуральные).

Примеры. $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$;
$792 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 11 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 11^1$

Запись произвольного делителя числа a через простые делители

Если $\boldsymbol{a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}}$ — каноническое разложение числа a, то натуральными делителями числа a будут только числа
$$d = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\beta_k},$$
где $0 \leqslant \beta_1 \leqslant \alpha_1$, $0 \leqslant \beta_2 \leqslant \alpha_2$, ..., $0 \leqslant \beta_k \leqslant \alpha_k$.

Количество всех делителей числа a равно

$$\boxed{(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \ldots (\alpha_k + 1)}$$

Пример. $180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^1$. Любой делитель числа 180
$$d = 2^{\beta_1} \cdot 3^{\beta_2} \cdot 5^{\beta_3},$$
где $0 \leqslant \beta_1 \leqslant 2$, $0 \leqslant \beta_2 \leqslant 2$, $0 \leqslant \beta_3 \leqslant 1$.

Количество всех делителей: $(2 + 1)(2 + 1)(1 + 1) = 18$

β_1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2
β_2	0	0	1	1	2	2	0	0	1	1	2	2	0	0	1	1	2	2
β_3	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
d	1	5	3	15	9	45	2	10	6	30	18	90	4	20	12	60	36	180

Таблица простых чисел (до 997)

2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43	47	53	59	61	67	71	73
79	83	89	97	101	103	107	109	113	127	131	137	139	149	151	157	163	167	173	179	181
191	193	197	199	211	223	227	229	233	239	241	251	257	263	269	271	277	281	283	293	307
311	313	317	331	337	347	349	353	359	367	373	379	383	389	397	401	409	419	421	431	433
439	443	449	457	461	463	467	479	487	491	499	503	509	521	523	541	547	557	563	569	571
577	587	593	599	601	607	613	617	619	631	641	643	647	653	659	661	673	677	683	691	701
709	719	727	733	739	743	751	757	761	769	773	787	797	809	811	821	823	827	829	839	853
857	859	863	877	881	883	887	907	911	919	929	937	941	947	953	967	971	977	983	991	997

ДЕЛЕНИЕ С ОСТАТКОМ И ПРИЗНАКИ ДЕЛИМОСТИ

Теорема о делении с остатком

Для любой пары целых чисел a и b ($b \neq 0$) существует, и притом единственная, пара целых чисел q и r, таких, что $a = bq + r$, где $0 \leqslant r < |b|$
(q — неполное частное от деления a на b, r — остаток от деления a на b)

Если при делении a на b остаток $r = 0$, это означает, что a **делится на** b ($a \,\vdots\, b$)

Примеры

1. При делении 37 на 5 неполное частное $q = 7$ и остаток $r = 2$, так как $37 = 5 \cdot 7 + 2$
2. При делении (-37) на 5 неполное частное $q = -8$ и остаток $r = 3$, так как $-37 = 5 \cdot (-8) + 3$ (остаток не бывает отрицательным!)

Прием нахождения остатка при делении на число m ($m \in N$)

Пример. Найти остаток при делении числа $A = 1997^{1998} + 1999^{2000}$ на 37.

Решение. 1999 при делении на 37 дает в остатке 1; 1997 при делении на 37 дает в остатке 36, но такой же самый остаток дает и число -1 ($-1 = 37 \cdot (-1) + 36$). Тогда число A при делении на 37 дает остаток $(-1)^{1998} + 1^{2000}$, т. е. 2

1. Убеждаемся, что данное числовое выражение содержит только суммы, произведения и степени целых чисел.
2. Для каждого слагаемого, множителя или основания степени находим его остаток r при делении на m (если остаток больше $\frac{m}{2}$, то иногда удобно вместо остатка r взять отрицательное число $r - m$, которое дает тот же остаток r при делении на m).
3. Подставляем полученные числа в данное выражение (вместо соответствующих слагаемых, множителей или оснований степеней) и получаем число, которое дает тот же остаток при делении на m, что и данное выражение

Признаки делимости

Данное число делится на число m, если выполняются указанные ниже условия.
Остатки при делении на m данного числа и числа, выделенного в признаке, совпадают

Делимость на m	Условие
На 2	*Последняя цифра числа делится на 2 (четная)*
На 5	*Последняя цифра числа 0 или 5*
На 10^k	*Число оканчивается на k нулей*
На 4	*Число, выраженное двумя последними цифрами данного числа, делится на 4*
На 8	*Число, выраженное тремя последними цифрами данного числа, делится на 8*
На 3	*Сумма цифр числа делится на 3*
На 9	*Сумма цифр числа делится на 9*
На 11	*Разность между суммой цифр, стоящих на нечетных местах (считая справа налево), и суммой цифр, стоящих на четных местах, делится на 11*

Таблица 10

НОД И НОК ДВУХ ЧИСЕЛ. ВЗАИМНО ПРОСТЫЕ ЧИСЛА

Наибольший общий делитель (НОД)

Определение. ***Наибольшим общим делителем*** двух или нескольких натуральных чисел называют наибольшее натуральное число, на которое делится каждое из данных чисел

Примеры
НОД (12; 18) = 6;
НОД (50; 65; 80) = 5

Взаимно простые числа

Определение. Два натуральных числа называют ***взаимно простыми***, если их НОД равен единице	**Пример** 8 и 15 — взаимно простые числа, так как НОД (8; 15) = 1

Нахождение НОД двух натуральных чисел

Алгоритм	Примеры
I. С помощью разложения на простые множители: 1) разложить данные числа на простые множители (в каноническом виде $a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$); 2) составить произведение из общих простых множителей, взятых с наименьшим показателем степени; 3) найти значение полученного произведения	$a = 280 = 2^3 \cdot 5 \cdot 7$ $b = 60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ Тогда НОД $(a;\ b) = 2^2 \cdot 5^1 = 20$
II. С помощью алгоритма Евклида 1. Опорное свойство. Если $a = bq + r$, то НОД $(a;\ b)$ = НОД $(b;\ r)$ 2. **Алгоритм Евклида** $(a > b)$: 1) разделить a на b с остатком $a = bq + r_1$; 2) разделить делитель b на остаток r_1: $b = r_1q_1 + r_2$; 3) разделить новый делитель r_1 на новый остаток r_2: $r_1 = r_2q_2 + r_3$ и т. д. **Последний отличный от нуля остаток и является НОД**	$(a = 280;\ b = 60)$ $280 : 60 = 4$ (ост. 40): $280 - 240 = 40$ $60 : 40 = 1$ (ост. 20): $60 - 40 = 20$ $40 : 20 = 2$ (ост. 0): $40 - 40 = 0$ НОД (280; 60) = = НОД (60; 40) = = НОД (40; 20) = 20
III. Если a делится на b, то **НОД $(a;\ b) = b$**	НОД (180; 60) = 60, так как 180 делится на 60

Наименьшее общее кратное (НОК)

Определение. Наименьшим общим кратным двух или нескольких натуральных чисел называют наименьшее натуральное число, которое делится на каждое из данных чисел	**Примеры** НОК (12; 18) = 36; НОК (5; 8; 10) = 40

Нахождение НОК двух натуральных чисел

Алгоритм	Примеры
I. 1) Разложить данные числа на простые множители (в каноническом виде: $a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$); 2) составить произведение из всех получившихся простых множителей, взяв каждый из них с наибольшим показателем степени; 3) найти значение полученного произведения. *Частный случай* **Если a делится на b, то НОК $(a;\ b) = a$**	$a = 280 = 2^3 \cdot 5 \cdot 7$; $b = 60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$. Тогда НОК $(a;\ b) = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^1 \cdot 7^1 = 840$ НОК (180; 60) = 180; так как 180 делится на 60
II. НОК можно также найти по формуле $\boxed{\text{НОК}\,(a;\ b) = \dfrac{ab}{\text{НОД}\,(a;\ b)}}$	$\text{НОК}\,(280; 60) = \dfrac{280 \cdot 60}{\text{НОД}\,(280; 60)} = \dfrac{280 \cdot 60}{20} = 840$

Связь между НОД и НОК двух чисел

$\boxed{\text{НОД}\,(a;\ b) \cdot \text{НОК}\,(a;\ b) = ab}$	*Произведение НОД и НОК двух натуральных чисел равно произведению этих чисел*

ПРОЦЕНТЫ

Определение. Процентом называют сотую часть целого (принимаемого за единицу)

1 % от числа a составляет $\frac{1}{100}a$

Основные задачи на проценты

1. Нахождение процента от числа

p % от числа a составляет $\frac{p}{100}a$

Пример. Найти 7 % от числа 300.

Решение. $\frac{7}{100}\cdot 300=21$

2. Нахождение числа по заданной величине его процента

Если p % от какого-то числа равно b, то само это число равно $b:\frac{p}{100}=\frac{b\cdot 100}{p}$

Пример. Найти число, 30 % которого равно 24.

Решение. Искомое число x является решением уравнения $\frac{30}{100}\cdot x=24$, откуда $x=24:\frac{30}{100}=80$

3. Нахождение процентного отношения двух чисел

Число a составляет $\frac{a}{b}\cdot 100\,\%$ от числа b

Пример. Сколько процентов составляет число 26 от числа 65?

Решение. Искомое число процентов равно $\frac{26}{65}\cdot 100=40$ (%)

4. Сложные проценты

Понятие сложного процента. Если данное число ежегодно (ежемесячно, ежедневно и т. п.) увеличивается на p % без изъятия прироста (т. е. прирост за год добавляется к первоначальной величине и проценты за следующий год исчисляются с наращенной величины), то в этом случае говорят о сложных процентах (аналогично, если ежегодно «число уменьшается на p %»)

Вычисление сложных процентов

Следить за изменением заданного числа при вычислении сложных процентов удобно с помощью следующих таблиц, введя ***коэффициент увеличения (уменьшения) k***

	1-й год	2-й год	3-й год	...	n-й год
Ежегодное увеличение на p % $\left(k=1+\frac{p}{100}\right)$					
Было	a	ka	k^2a		
Увеличилось за год	$\frac{p}{100}\cdot a$	$\frac{p}{100}\cdot ka$	$\frac{p}{100}\cdot k^2a$	...	...
Стало	$a+\frac{p}{100}\cdot a=$ $=\left(1+\frac{p}{100}\right)a=ka$	$ka+\frac{p}{100}\cdot ka=$ $=\left(1+\frac{p}{100}\right)ka=k^2a$	$k^2a+\frac{p}{100}\cdot k^2a=$ $=\left(1+\frac{p}{100}\right)k^2a=k^3a$	...	k^na
Ежегодное уменьшение на p % $\left(k=1-\frac{p}{100}\right)$					
Было	a	ka	k^2a		
Уменьшилось за год	$\frac{p}{100}\cdot a$	$\frac{p}{100}\cdot ka$	$\frac{p}{100}\cdot k^2a$	...	...
Стало	$a-\frac{p}{100}\cdot a=$ $=\left(1-\frac{p}{100}\right)a=ka$	$ka-\frac{p}{100}\cdot ka=$ $=\left(1-\frac{p}{100}\right)ka=k^2a$	$k^2a-\frac{p}{100}\cdot k^2a=$ $=\left(1-\frac{p}{100}\right)k^2a=k^3a$	...	k^na

ПРОПОРЦИИ

Определение. Пропорцией называют равенство двух числовых отношений. (**Отношением** называют частное от деления одного числа на другое.)

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ или $a:b=c:d$ $(a, b, c, d \neq 0)$	a и d — крайние члены пропорции; b и c — средние члены пропорции. Каждый член пропорции называют четвертым пропорциональным по отношению к остальным трем

Свойства пропорции

$ad = bc$	***Произведение крайних членов пропорции равно произведению ее средних членов***
$a=\frac{bc}{d}$; $d=\frac{bc}{a}$	Каждый крайний член пропорции равен произведению ее средних членов, деленному на другой крайний
$b=\frac{ad}{c}$; $c=\frac{ad}{b}$	Каждый средний член пропорции равен произведению ее крайних членов, деленному на другой средний
Одновременно справедливы такие пропорции: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$; $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$; $\frac{d}{b}=\frac{c}{a}$; $\frac{d}{c}=\frac{b}{a}$	В каждой пропорции можно поменять местами или только средние члены, или только крайние, или и те и другие одновременно

Производные пропорции

Если данная пропорция $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, то справедливо соотношение

$$\boxed{\frac{ma+nb}{pa+qb}=\frac{mc+nd}{pc+qd}},$$

называемое **производной пропорцией**
(где m, n, p, q — любые числа и $ma + nb$, $pa + qb$, $mc + nd$, $pc + qd \neq 0$)

Наиболее часто употребляемые производные пропорции

Если $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, то: 1) $\boxed{\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}}$, 2) $\boxed{\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}}$, 3) $\boxed{\frac{a}{a+b}=\frac{c}{c+d}}$,

4) $\boxed{\frac{a}{a-b}=\frac{c}{c-d}}$, 5) $\boxed{\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}}$, 6) $\boxed{\frac{a-b}{a+b}=\frac{c-d}{c+d}}$.

Свойство равенства нескольких отношений

Из равенства нескольких отношений $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\ldots=\frac{a_n}{b_n}$ следует:

1) $\boxed{\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{b_1+b_2+\ldots+b_n}=\frac{a_1}{b_1}}$,

2) $\boxed{\frac{a_1m_1+a_2m_2+\ldots+a_nm_n}{b_1m_1+b_2m_2+\ldots+b_nm_n}=\frac{a_1}{b_1}}$,

где m_1, m_2, ..., m_n — любые числа и $b_1m_1 + b_2m_2 + \ldots + b_nm_n \neq 0$

ОДНОЧЛЕНЫ, МНОГОЧЛЕНЫ И ДЕЙСТВИЯ НАД НИМИ

Одночлены

Определения	Примеры
Одночленом *называют конечное произведение чисел, букв и их натуральных степеней, а также сами числа, буквы и их степени.* **Число 0 называют нулевым одночленом**	$0;\ 3a^2x;\ -\frac{2}{3}ab^3;\ 5;\ y;\ x^6$ — одночлены
Степенью одночлена называют сумму показателей букв, входящих в одночлен. Если одночленом является число, не равное нулю, то его степень считается равной нулю. **Число 0 степени не имеет**	$3a^3b^2c$ — одночлен шестой степени $(3 + 2 + 1 = 6)$ $5ax^3$ — одночлен четвертой степени $(1 + 3 = 4)$ 7 — одночлен нулевой степени
Если в запись одночлена входит переменная x в степени k (x^k), то говорят, что этот **одночлен имеет по x** (или относительно x) **степень k**	$5ax^3$ — одночлен третьей степени относительно переменной x
Одночлен записан в **стандартном виде**, если первый его множитель — число, называемое **коэффициентом одночлена**, а следующие множители — буквы в некоторых степенях, расположенные по алфавиту (латинскому или греческому)	$7a^5b^3c^6;\ -4xy^3z^2;\ 3\alpha^2\beta\gamma^3$ — одночлены в стандартном виде
Одночлены называют **подобными**, если они равны между собой или различаются только своими коэффициентами	$4a^3b^2;\ -7a^3b^2;\ \frac{2}{3}a^3b^2$ — подобные одночлены

Действия над одночленами

Сложение и вычитание	$3a^2 + ab + b^2 + 5a^2 - 3ab = 8a^2 - 2ab + b^2$
Умножение	$(4a^3b^2c)\cdot(-2a^4bd) = -8a^7b^3cd$
Возведение в степень	$(2x^2y)^3 = 2^3\cdot(x^2)^3y^3 = 8x^6y^3$
Деление	$(18a^6b^4c):(3a^3b^2c) = \frac{18a^6b^4c}{3a^3b^2c} = 6a^3b^2$

Многочлены

Определения	Примеры
Многочленом *называют сумму конечного числа одночленов (каждый из которых называют членом многочлена).* Одночлены также считаются многочленами, состоящими из одного члена. **Число 0 называется нулевым многочленом**	$5a^2b + ab + 3;\ 2x^3 - 5x^2 + 1$ — многочлены (здесь $-5x^2 = +(-5)x^2$) $0;\ 2ax^2;\ 7;\ x$ — многочлены, состоящие из одного члена
Степенью ненулевого многочлена (в котором приведены подобные члены) называется наибольшая степень из степеней его членов (одночленов). **Нулевой многочлен (0) степени не имеет**	$a^2 + abc - c^2$ — многочлен третьей степени (так как наибольшая степень у члена abc — третья)

Действия над многочленами	
Сложение	$(2a^2 + 3ab - 5b) + (7a^2 - 4ab + 5b) = 9a^2 - ab$
Вычитание	$(4x - 3y) - (2x + 5y) =$ $= (4x - 3y) + (-2x - 5y) = 2x - 8y$
Умножение	$(a + 5b)(a - 2b) = a^2 - 2ab + 5ab - 10b^2 =$ $= a^2 + 3ab - 10b^2$
Тождественно равные многочлены	
Определение. Два многочлена называются **тождественно равными,** если они принимают равные значения при всех значениях букв (иногда тождественное равенство обозначают знаком «≡»)	**Пример** $(a + b)^2 \equiv a^2 + 2ab + b^2$ (при любых значениях букв a и b равенство верно)
Основные приемы разложения многочлена на множители	
Вынесение общего множителя за скобку	$15ab^2 + 3a^2 - 6a = 3a(5b^2 + a - 2)$
Метод группировки	$xy + 2yz - x - 2z =$ $= y(x + 2z) - (x + 2z) = (x + 2z)(y - 1)$
Применение формул сокращенного умножения и других формул (см. также табл. 14)	$a^2 + 10ab^2 + 25b^4 = (a + 5b^2)^2;$ $a^4 + 64 = a^4 + 16a^2 + 64 - 16a^2 =$ $=(a^2 + 8)^2 - (4a)^2 = (a^2 + 8 + 4a)(a^2 + 8 - 4a)$

Таблица 14

ФОРМУЛЫ СОКРАЩЕННОГО УМНОЖЕНИЯ И РАЗЛОЖЕНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ НА МНОЖИТЕЛИ	
$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	**Квадрат суммы** двух чисел равен квадрату первого числа плюс удвоенное произведение первого числа на второе плюс квадрат второго числа
$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	**Квадрат разности** двух чисел равен квадрату первого числа минус удвоенное произведение первого числа на второе плюс квадрат второго числа
$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$	**Разность квадратов** двух чисел равна произведению суммы этих чисел на их разность
$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$	**Куб суммы** двух чисел равен кубу первого числа плюс утроенное произведение квадрата первого числа на второе плюс утроенное произведение первого числа на квадрат второго плюс куб второго числа
$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ $(a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b)$	**Куб разности** двух чисел равен кубу первого числа минус утроенное произведение квадрата первого числа на второе плюс утроенное произведение первого числа на квадрат второго минус куб второго числа
$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$	**Сумма кубов** двух чисел равна произведению суммы этих чисел на неполный квадрат разности этих чисел

$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$	**Разность кубов** двух чисел равна произведению разности этих чисел на неполный квадрат суммы этих чисел
$(a + b + c)^2 =$ $= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$	**Квадрат суммы** нескольких выражений равен сумме квадратов всех слагаемых плюс все удвоенные произведения каждого выражения на каждое последующее

Разложение на множители квадратного трехчлена и некоторых многочленов

Квадратный трехчлен

$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, где x_1 и x_2 — корни квадратного трехчлена, т. е. корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$

Обобщения

1. ***Если для многочлена n-й степени от переменной x известны n его корней*** $x_1; x_2; \ldots; x_n$, то

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = a_0(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n) \quad (a_0 \neq 0)$$

2. ***Если для многочлена $f(x)$ известен только один корень*** $x = \alpha$ (т. е. α — один из корней уравнения $f(x) = 0$), тогда этот многочлен делится нацело на $x - \alpha$ и его можно записать следующим образом:

$$f(x) = (x - \alpha)\cdot g(x)$$
(α — корень уравнения $f(x) = 0$), где $g(x)$ можно найти, например, делением «уголком» многочлена $f(x)$ на двучлен $x - \alpha$ (см. табл. 15)

Обобщение некоторых формул сокращенного умножения

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

Примеры

1. $a^4 - b^4 = (a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$
2. $a^5 - b^5 = (a - b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$
3. При $b = 1$ $\;a^n - 1 = (a - 1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \ldots + a^2 + a + 1)$

Для **нечетных** натуральных n

$$a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \ldots + a^2b^{n-3} - ab^{n-2} + b^{n-1})$$

Примеры

1. $a^5 + b^5 = (a + b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$.
2. При $b = 1$ ($n = 2k + 1$ — нечетное число)
$$a^{2k+1} + 1 = (a + 1)(a^{2k} - a^{2k-1} + a^{2k-2} - \ldots + a^2 - a + 1)$$

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac)$$

Степень двучлена (бином Ньютона)

$(a + b)^n = a^n + \alpha_1a^{n-1}b + \alpha_2a^{n-2}b^2 + \ldots + \alpha_{n-2}a^2b^{n-2} + \alpha_{n-1}ab^{n-1} + b^n$ (см. также табл. 84), где коэффициенты этого разложения $1; \alpha_1; \alpha_2; \ldots; \alpha_{n-2}; \alpha_{n-1}; 1$ можно взять из таблицы, именуемой **треугольником Паскаля**

Степень	Коэффициенты разложения
$(a+b)^0$	1
$(a+b)^1$	1 1
$(a+b)^2$	1 2 1
$(a+b)^3$	1 3 3 1
$(a+b)^4$	1 4 6 4 1
$(a+b)^5$	1 5 10 10 5 1
$(a+b)^6$	1 6 15 20 15 6 1
....	....

В этой таблице в каждой строке по краям стоят единицы, а каждое из остальных чисел равно сумме двух чисел, находящихся над ним слева и справа

Пример. $(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$

МНОГОЧЛЕН ОТ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Определение. Многочленом стандартного вида от одной переменной x называют многочлен вида $\boldsymbol{P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n}$, где $a_0, a_1, \ldots, a_n$ — числовые коэффициенты

Если $a_0 \neq 0$, то этот многочлен называют **многочленом *n*-й степени** относительно переменной x. Член a_0x^n ($a_0 \neq 0$) называют **старшим членом** многочлена $P(x)$, а a_n — **его свободным членом**	**Примеры** 1. $3x^3 - 5x^2 + 1$ — многочлен третьей степени. 2. $0x^3 + 4x^2 - 6$ — многочлен второй степени

Тождественно равные многочлены от одной переменной

Определение. Два многочлена называют **тождественно равными,** если они принимают равные значения при всех значениях переменной.

(Иногда тождественное равенство обозначают знаком «≡».)

Свойства тождественного равенства многочленов от одной переменной

1. **Если многочлен** $P(x)$ **тождественно равен нулю** (т. е. принимает нулевые значения при всех значениях x), **то все его коэффициенты равны нулю**

$$\boxed{\begin{array}{c} a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n \equiv 0 \\ \text{(при всех значениях } x\text{)}\end{array}} \Leftrightarrow \boxed{a_0 = a_1 = \ldots = a_n = 0}$$

2. **Если два многочлена** $P(x)$ **и** $Q(x)$ **тождественно равны** (т. е. принимают одинаковые значения при всех значениях x), **то** они совпадают (т. е. **их степени одинаковы и коэффициенты при одинаковых степенях равны)**	**Пример** Если известно, что тождественно равны многочлены $2x^2 - 5x + b$ и $ax^3 + cx^2 + dx + 1$, то $a = 0$, $c = 2$, $d = -5$, $b = 1$

Деление многочлена на многочлен

Определение. Если для двух многочленов $A(x)$ и $B(x)$ можно найти такой многочлен $Q(x)$, что $A(x) = B(x) \cdot Q(x)$, то говорят, что $A(x)$ делится на $B(x)$. $\boxed{A(x) \,\vdots\, B(x)} \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{c}\text{Можно найти } Q(x): \\ A(x) = B(x) \cdot Q(x)\end{array}}$	**Пример** Так как $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$, то многочлен $A(x) = x^2 - 4$ делится на многочлен $B(x) = x - 2$ (при делении получаем частное $Q(x) = x + 2$)

Деление многочлена на многочлен с остатком

Определение. *Многочлен* $A(x)$ *делится на многочлен* $B(x)$ *с остатком, если можно найти такую пару многочленов* $Q(x)$ *и* $R(x)$*, что* $A(x) = B(x) \cdot Q(x) + R(x)$*, причем степень остатка* $R(x)$ *меньше степени* $B(x)$. В случае, когда степень делимого $A(x)$ меньше степени делителя $B(x)$, считают, что неполное частное $Q(x) = 0$ и остаток $R(x) = A(x)$. ***Если остаток*** $\boldsymbol{R(x) = 0}$***, то многочлен*** $\boldsymbol{A(x)}$ ***делится на многочлен*** $\boldsymbol{B(x)}$ ***(без остатка)***	**Пример** $\underbrace{x^2 - x + 1}_{A(x)} = \underbrace{(x - 1)}_{B(x)} \cdot \underbrace{x}_{Q(x)} + \underbrace{1}_{R(x)}$