

Комплексная подготовка к ЕГЭ и ГИА (ОГЭ)

Е.П. Нелин

Геометрия

7-11 классы

*Определения, свойства,
методы решения задач —
в таблицах*

4-е издание, исправленное

ИЛЕКСА
МОСКВА
2023

УДК 373:51
ББК 22.151я721
Н49

Для детей старше шести лет.
В соответствии с Федеральным законом
от 29 декабря 2010 г. № 436-ФЗ.

Нелин Е.П.

Н49 Геометрия. 7–11 классы. Определения, свойства, методы решения задач – в таблицах. Сер. Комплексная подготовка к ЕГЭ и ГИА (ОГЭ). — 4-е изд., испр. — М.: ИЛЕКСА, 2023. — 80 с.: ил.

ISBN 978-5-89237-652-5

В пособии логически упорядочены и систематизированы основные и дополнительные сведения из школьного курса геометрии (планиметрия, стереометрия, координаты и векторы).

Учебное пособие может быть использовано как учащимися при повторении школьного курса геометрии, так и учителями на уроке при работе по любому учебнику геометрии для общеобразовательных учебных заведений.

УДК 373:51
ББК 22.151я721

Подписано в печать 25.04.2023. Формат 60×90/8.
Усл.-печ. л. 10,00. Тираж 3000 экз. Заказ № .

ООО «Илекса»
сайт: www.ilexa.ru, E-mail: real-ilexa@yandex.ru,
телефон: +7 (964) 534-80-01

ISBN 978-5-89237-652-5

© Нелин Е.П., 2016
© ИЛЕКСА, 2016

ВВЕДЕНИЕ

В учебном пособии логически упорядочены и систематизированы основные и дополнительные сведения из школьного курса геометрии (планиметрия и стереометрия), которые позволяют решать самые сложные геометрические задачи, предлагаемые на выпускных и вступительных экзаменах (во время государственной итоговой аттестации (основного государственного экзамена) или в заданиях ЕГЭ по математике).

Для эффективного использования предлагаемых таблиц по планиметрии и стереометрии следует учитывать некоторые особенности логического построения школьного курса геометрии.

Как известно, школьный курс геометрии дает представление о так называемом дедуктивном построении научной теории. Такое построение предполагает, что каждое свойство (теорема) курса геометрии должно быть доказано (выведено) путем логических рассуждений из уже известных (ранее доказанных) свойств. При этом основные свойства основных фигур (в планиметрии это точки и прямые, а в стереометрии — точки, прямые и плоскости) — аксиомы — постулируются, то есть принимаются без доказательства.

В таблицах по планиметрии и стереометрии приведены системы аксиом, принятые в учебнике геометрии А. В. Погорелова (полная их формулировка приведена в этом учебнике). Однако и при работе по другим учебникам геометрии можно использовать

эти таблицы, несмотря на то что в различных учебниках одно и то же геометрическое понятие может быть определено по-разному. Например, касательную к окружности можно определить как прямую, имеющую с окружностью только одну общую точку, или как прямую, проходящую через точку окружности перпендикулярно радиусу, проведенному в эту точку. Приняв за определение одно из этих утверждений, можно доказать другое (уже не как определение, а как свойство или признак касательной). По этой причине в разных учебниках геометрии могут приводиться различные определения одного и того же понятия, однако полный набор свойств, связанных с данным понятием, которые зафиксированы в его определении, признаках и свойствах, является практически одинаковым во всех учебниках (именно этот набор свойств и выделен в данных справочных таблицах).

Работая с таблицами, следует учитывать, что наряду с терминами «аксиома» и «теорема» в курсе геометрии употребляются также термины «определение», «признак», «свойство». Соотношения между этими понятиями представлены в табл. 1.

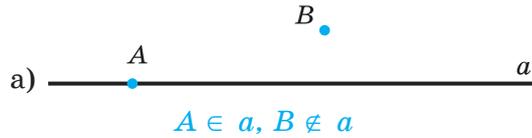
Данное пособие может быть использовано как учащимися для повторения школьного курса геометрии, так и учителями на уроке при обобщении материала той или иной темы при работе по любому учебнику геометрии для общеобразовательных учебных заведений.

ОПРЕДЕЛЕНИЯ, ПРИЗНАКИ И СВОЙСТВА ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФИГУР И ОТНОШЕНИЙ

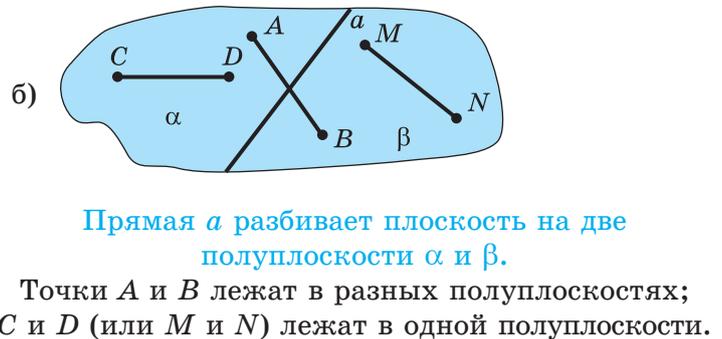


АКСИОМЫ ПЛАНИМЕТРИИ

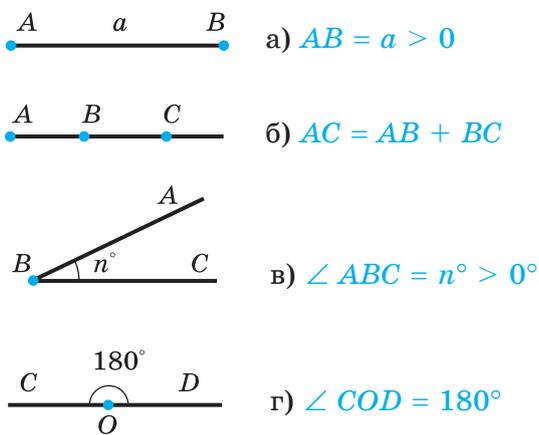
1. Аксиомы принадлежности



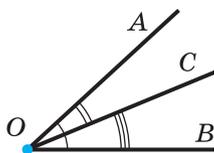
2. Аксиомы взаимного расположения точек на прямой и на плоскости



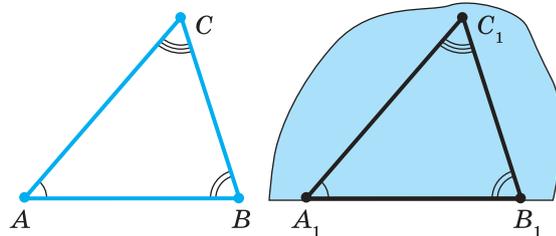
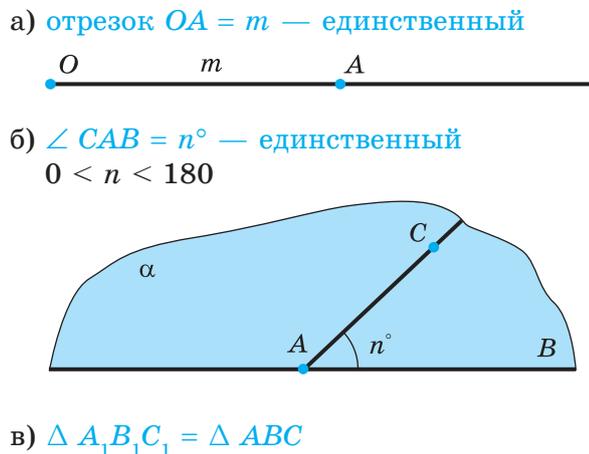
3. Аксиомы измерения



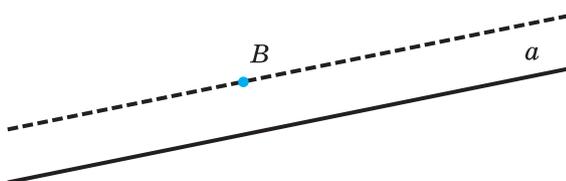
д) $\angle AOB = \angle AOC + \angle COB$



4. Аксиомы откладывания

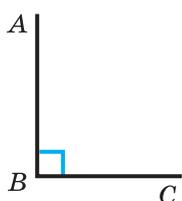


5. Аксиома параллельных



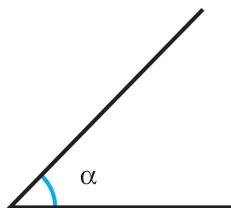
$B \notin a$.
Через точку B можно провести на плоскости не более одной прямой, параллельной данной

УГЛЫ



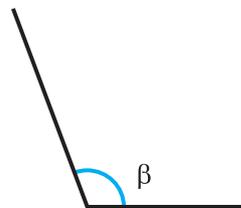
$$\angle ABC = 90^\circ = \frac{\pi}{2} \text{ рад}$$

прямой угол



$$\alpha < 90^\circ$$

острый угол



$$\beta > 90^\circ$$

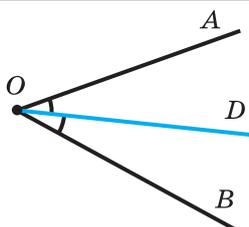
тупой угол

(стороны развернутого угла — дополняющие лучи)



$$\angle AOB = 180^\circ = \pi \text{ рад}$$

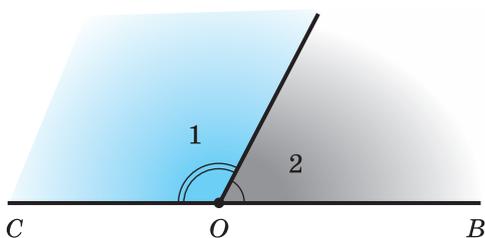
развернутый



Луч OD — биссектриса $\angle AOB$

(делит $\angle AOB$ пополам, то есть $\angle AOD = \angle BOD$)

Смежные углы

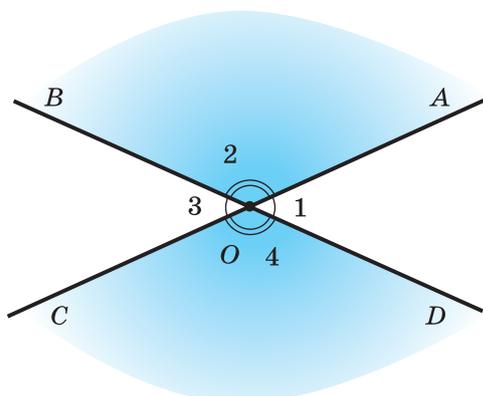


$\angle 1$ и $\angle 2$ — смежные

$$\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$$

Сумма смежных углов равна 180°

Вертикальные углы



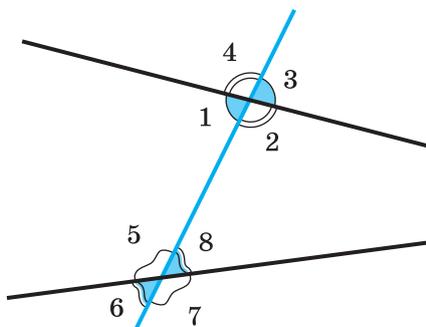
$\angle 1$ и $\angle 3$ — вертикальные
 $\angle 2$ и $\angle 4$ — вертикальные

$$\angle 1 = \angle 3$$

$$\angle 2 = \angle 4$$

Вертикальные углы равны

Углы, образующиеся при пересечении двух прямых секущей

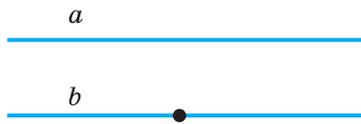


Внутренние односторонние:
 $\angle 1$ и $\angle 5$; $\angle 2$ и $\angle 8$.

Внутренние накрест лежащие:
 $\angle 1$ и $\angle 8$; $\angle 2$ и $\angle 5$.

Соответственные:
 $\angle 4$ и $\angle 5$; $\angle 3$ и $\angle 8$; $\angle 1$ и $\angle 6$; $\angle 2$ и $\angle 7$

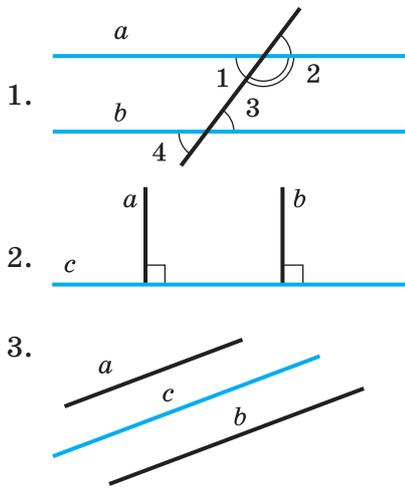
ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПРЯМЫЕ



Определение Две прямые называют **параллельными**, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются.

$$a \parallel b$$

Через точку вне прямой можно провести только одну прямую, параллельную данной.



Признаки параллельности

1. **Если** $\angle 1 = \angle 3$,
или $\angle 1 = \angle 4$,
или $\angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$,
то $a \parallel b$.

2. **Если** $a \perp c$, $b \perp c$
то $a \parallel b$.

3. **Если** $a \parallel c$, $b \parallel c$,
то $a \parallel b$.

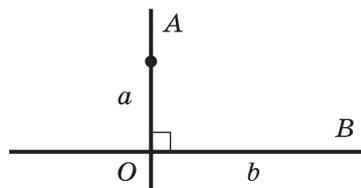
Две прямые, параллельные третьей прямой, параллельны друг другу

Свойства

1. **Если** $a \parallel b$,
то $\angle 1 = \angle 3$,
 $\angle 1 = \angle 4$,
 $\angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$.

2. **Если** $a \parallel b$, $c \perp a$,
то $c \perp b$.

ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫЕ ПРЯМЫЕ

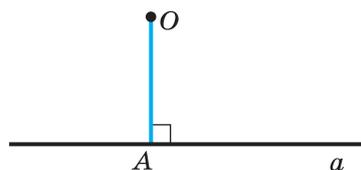


Определение. Две прямые называют **перпендикулярными**, если они пересекаются под прямым углом.

$$a \perp b \Leftrightarrow \angle AOB = 90^\circ$$

Через данную точку можно провести только одну прямую, перпендикулярную данной.

ПЕРПЕНДИКУЛЯР К ПРЯМОЙ



Определение. **Перпендикуляром** к данной прямой называют отрезок прямой, перпендикулярной к данной, от данной точки до точки пересечения этих прямых.

$$OA \perp a$$

OA — перпендикуляр к a

A — основание перпендикуляра

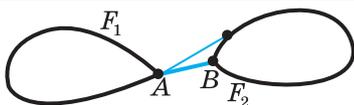
Свойства

1. Расстояние от точки до прямой измеряют по перпендикуляру.

$$OA \perp a \ (A \in a) \quad OA \text{ — расстояние от точки } O \text{ до прямой } a$$

2. Перпендикуляр — кратчайшее расстояние от данной точки до точек данной прямой.

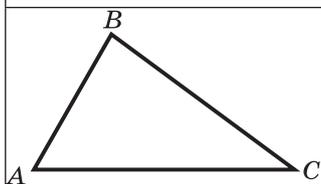
Расстояние между фигурами



Определение. За **расстояние между фигурами** принимают наименьшее из всех расстояний между точками одной фигуры и точками другой фигуры (если оно существует).

$$\text{Расстояние от } F_1 \text{ до } F_2 = AB$$

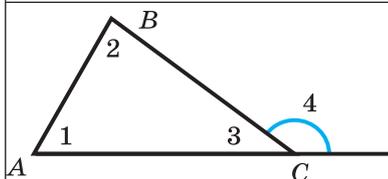
СВОЙСТВА СТОРОН И УГЛОВ ТРЕУГОЛЬНИКА



$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$$

Сумма углов треугольника равна 180° .

Внешний угол треугольника



Определение. Угол, смежный с внутренним углом треугольника, называют **внешним углом треугольника** при данной вершине.

$$\angle 4 \text{ — внешний (при вершине } C)$$

Свойства

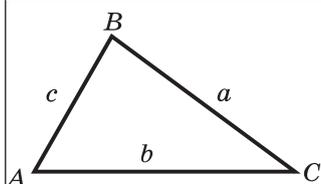
1. Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних углов, не смежных с ним.

$$\angle 4 = \angle 1 + \angle 2$$

2. Внешний угол треугольника больше любого внутреннего угла, не смежного с ним.

$$\angle 4 > \angle 1, \angle 4 > \angle 2$$

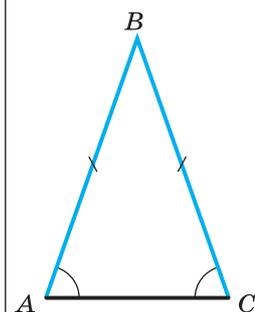
Неравенство треугольника



$$|b - c| < a < b + c$$

В произвольном треугольнике каждая сторона меньше суммы двух других сторон (и больше модуля разности этих сторон).

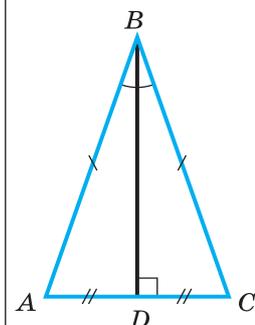
Равнобедренный треугольник



Определение. Треугольник называют **равнобедренным**, если у него две стороны равны.

$$\triangle ABC \text{ — равнобедренный (} AB = BC)$$

AC — основание, AB и BC — боковые стороны



Свойства

- Если в $\triangle ABC$ $AB = BC$, то $\angle A = \angle C$.
- Если $\triangle ABC$ — равнобедренный и BD — медиана, то BD — высота и биссектриса.

В равнобедренном треугольнике высота, медиана и биссектриса, проведенные к основанию, совпадают.

Признаки

- Если в $\triangle ABC$ $\angle A = \angle C$, то $AB = BC$.
- Если в треугольнике совпадают:
 - высота и медиана, или
 - высота и биссектриса, или
 - медиана и биссектриса,
 то треугольник равнобедренный.

СОДЕРЖАНИЕ

Таблица 1. Определения, признаки и свойства геометрических фигур и отношений ... 4	Таблица 35. Параллельность прямой и плоскости .. 34	
I. Планиметрия		
Таблица 2. Аксиомы планиметрии..... 5	Таблица 36. Параллельность плоскостей..... 35	
Таблица 3. Углы 6	Таблица 37. Изображение пространственных фигур на плоскости 36	
Таблица 4. Параллельные прямые. Перпендикулярные прямые. Перпендикуляр к прямой 7	Таблица 38. Перпендикулярность прямой и плоскости..... 37	
Таблица 5. Свойства сторон и углов треугольника.. 8	Таблица 39. Перпендикуляр и наклонная..... 38	
Таблица 6. Равенство треугольников..... 9	Таблица 40. Теорема о трех перпендикулярах 39	
Таблица 7. Медиана треугольника 10	Таблица 41. Перпендикулярность двух плоскостей 39	
Таблица 8. Биссектриса треугольника 10	Таблица 42. Углы в пространстве..... 40	
Таблица 9. Высота треугольника 11	Таблица 43. Расстояния в пространстве 42	
Таблица 10. Средняя линия треугольника 11	Таблица 44. Геометрические места точек (ГМТ)... 43	
Таблица 11. Соотношение между элементами прямоугольного треугольника 12	Таблица 45. Призма 44	
Таблица 12. Соотношение между сторонами и углами в произвольном треугольнике 12	Таблица 46. Прямая призма..... 45	
Таблица 13. Преобразование фигур. Движение.... 13	Таблица 47. Параллелепипед..... 46	
Таблица 14. Преобразование подобия 14	Таблица 48. Пирамида..... 47	
Таблица 15. Подобие треугольников..... 15	Таблица 49. Правильная пирамида 48	
Таблица 16. Параллелограмм и его виды 16	Таблица 50. Положение высоты в некоторых видах пирамид..... 49	
Таблица 17. Трапеция 18	Таблица 51. Усеченная пирамида..... 51	
Таблица 18. Окружность, хорды и дуги..... 19	Таблица 52. Правильные многогранники 52	
Таблица 19. Окружность. Касательные и секущие . 20	Таблица 53. Цилиндр 53	
Таблица 20. Взаимное расположение прямой и окружности. Взаимное расположение двух окружностей..... 21	Таблица 54. Сечения цилиндра плоскостями..... 54	
Таблица 21. Общие касательные двух окружностей..... 22	Таблица 55. Конус..... 55	
Таблица 22. Углы в окружности 23	Таблица 56. Сечения конуса плоскостями..... 56	
Таблица 23. Длина окружности и её частей. Площадь круга и его частей..... 24	Таблица 57. Усеченный конус 57	
Таблица 24. Вписанный и описанный многоугольники. Вписанный и описанный четырехугольники. Прямоугольник. Трапеция и ромб. Квадрат..... 25	Таблица 58. Сфера и шар..... 58	
Таблица 25. Окружность, описанная около треугольника, и окружность, вписанная в треугольник 26	Таблица 59. Сечение шара плоскостью 58	
Таблица 26. Окружности, описанные и вписанные в правильные многоугольники 27	Таблица 60. Плоскость и прямая, касательные к шару (сфере)..... 59	
Таблица 27. Площади треугольников 27	Таблица 61. Шар, описанный около призмы 60	
Таблица 28. Площади четырехугольников 28	Таблица 62. Шар, вписанный в призму 61	
Таблица 29. Введение неизвестных при решении задач на вычисление 29	Таблица 63. Шар, описанный около пирамиды ... 62	
Таблица 30. Использование метода площадей при решении задач 30	Таблица 64. Шар, описанный около прямоугольного параллелепипеда и правильной четырехугольной пирамиды..... 63	
Таблица 31. Использование вспомогательной окружности при решении задач..... 31	Таблица 65. Шар, вписанный в пирамиду..... 65	
Таблица 32. Задачи, связанные с описанной или вписанной окружностью 32	Таблица 66. Решение стереометрических задач на комбинацию тел вращения 66	
Таблица 33. Некоторые полезные теоремы..... 33	Таблица 67. Нахождение расстояний между скрещивающимися прямыми..... 67	
II. Стереометрия		
Таблица 34. Аксиомы стереометрии 34	Таблица 68. Нахождение углов между скрещивающимися прямыми..... 69	
	Таблица 69. Решение стереометрических задач на вычисление 70	
	Таблица 70. Решение задач на построение сечений многогранников..... 71	
	III. Координаты и векторы	
	Таблица 71. Декартовы координаты 74	
	Таблица 72. Векторы 75	
	Таблица 73. Операции над векторами..... 76	
	Таблица 74. Разложение вектора 77	
	Таблица 75. Перевод геометрических фактов на векторный язык и векторных соотношений на геометрический язык ... 78	
	Таблица 76. Использование координат и векторов при решении задач..... 79	