В.И. Голубев, К.К. Мосевич, В.С. Панфёров, В.А. Тарасов

Треугольник

Основные и дополнительные сведения

Теория и задачи

Москва
Илекса
2021

УДК 373(076.1):514
ББК 74.262+22.151.0
Г62

Для детей старше двенадцати лет.
В соответствии с Федеральным законом
от 29 декабря 2010 г. № 436-ФЗ.

Голубев В.И., Мосевич К.К., Панфёров В.С., Тарасов В.А.

Г62 Треугольник. Основные и дополнительные сведения. Теория и задачи. — М.: Илекса, 2021. 176 с. (Серия: «Избранные задачи по геометрии».)

ISBN 978-5-89237-482-8

Цель книги — помочь читателю выработать и закрепить устойчивые навыки и умения решения задач, в которых присутствует тема «Треугольник»; повторить или изучить курс «Планиметрия»; подготовиться к экзаменам, в том числе к ЕГЭ по математике, и к математическим олимпиадам. В учебном пособии обобщен опыт проведения экзаменов разного уровня за последние годы, сформирован исчерпывающий объем информации по теме. Учебное пособие логически связано с книгой «Избранные задачи по геометрии. Окружность» В.Б. Алексеева, В.С. Панфёрова, В.А. Тарасова, выпущенной издательством «Илекса».

Книга адресована абитуриентам, школьникам, учителям и всем любителям геометрии.

Подписано в печать 05.12.2020. Формат 60×88/16.
Усл.-печ. л. 10,76. Тираж 1000 экз. Заказ № .
ООО «Илекса»
сайт: www.ilexa.ru, E-mail: real-ilexa@yandex.ru,
телефон: +7 (964) 534-80-01

ISBN 978-5-89237-482-8

Введение

Треугольник — центральная фигура геометрии. Говорят, что он неисчерпаем как атом. Действительно, информация по теме «Треугольник» весьма обширна (см. например [1–23]). Данная книга поможет читателю не утонуть в этом море информации, поможет повторить, освоить тему, уверенно сдать любой экзамен, в том числе ЕГЭ по математике. Именно для этого авторы изучили экзаменационные задачи за последние полвека, на основе полученного опыта тщательно отфильтровали, отобрали нужную школьнику информацию и четко, ясно изложили ее на доступном рядовому школьнику языке.

Книга состоит из двух частей. В части I собрана и удобно «упакована» основная информация по теме «Треугольник». Она достаточна, например, для *базового уровня ЕГЭ* по математике. Здесь же приведены основные сведения об обобщенных теоремах подобия для нескольких треугольников.

В части II собрана (с доказательствами) *дополнительная* информация по теме «Треугольник», разбросанная по многочисленным пособиям и публикациям. Часть II ориентирована на *профильный уровень ЕГЭ* по математике, на конкурсные экзамены, олимпиады; содержит «ключи» для решения многих экзаменационных задач средней и повышенной сложности.

Авторы стремились обеспечить читателю своеобразную автономию, т.е. возможность изучения предлагаемой работы без обращения к внешним источникам. Для этой цели здесь приведены доказательства важных классических неравенств (в разделе «Используемые неравенства»). Последние применяются далее при доказательствах свойств треугольника (в разделе «Геометрия треугольника, дополнительные сведения»).

Книга призвана расширить математический кругозор читателя, повысить его общую математическую культуру.

Часть I

Треугольник. Основные сведения и опорные свойства

Используемые обозначения

Они стандартны, полностью соответствуют школьным учебникам и пояснены на рис. 1, а–б). Здесь:

a, b, c — стороны треугольника ABC, α, β, γ — противолежащие им углы, h_a, h_b, h_c — высоты, m_a, m_b, m_c — медианы, l_a, l_b, l_c — биссектрисы, проведенные к соответствующим сторонам, R, r — радиусы описанной и вписанной окружностей соответственно, $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ — полупериметр, S — площадь треугольника, r_a, r_b, r_c — радиусы вневписанных окружностей, x, y, z — длины касательных к вписанной окружности, проведенных из вершин A, B, C соответственно.

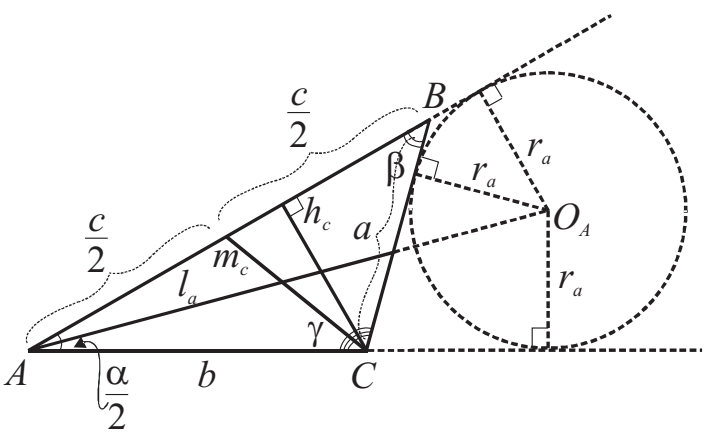

Рис. 1 а)

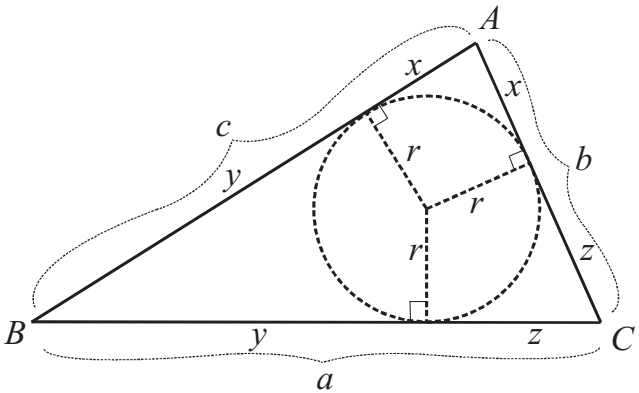

Рис. 1 б)

1. Произвольный треугольник

1.1. Признаки равенства треугольников (по сторонам и углам), рис. 2 а, б)

1-й признак (по двум сторонам и углу между ними): если две стороны и угол между ними одного треугольника равны соответственно двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны:

$$\begin{cases} a = a_1 \\ b = b_1 \\ \gamma = \gamma_1 \end{cases} \Rightarrow \Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1.$$

2-й признак (по стороне и прилежащим к ней двум углам): если сторона и прилежащие к ней углы одного треугольника равны соответственно

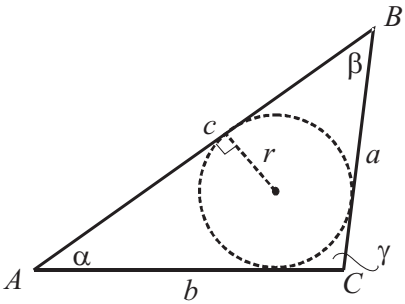

Рис. 2 а)

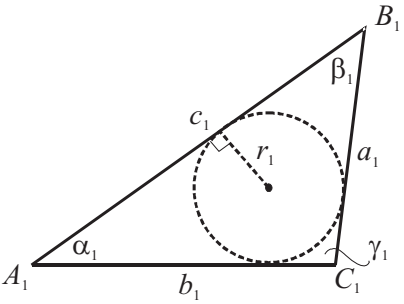

Рис. 2 б)

стороне и прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны:

$$\begin{cases} a = a_1 \\ \beta = \beta_1 \\ \gamma = \gamma_1 \end{cases} \Rightarrow \Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1.$$

3-й признак (по трем сторонам): если три стороны одного треугольника равны соответственно трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны:

$$\begin{cases} a = a_1 \\ b = b_1 \\ c = c_1 \end{cases} \Rightarrow \Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1.$$

Дополнительно приведем

4-й признак (по двум сторонам и большему углу): если две стороны и больший угол одного треугольника равны соответственно двум сторонам и большему углу другого треугольника, то такие треугольники равны:

$$\{ b = b_1,\ c = c_1,\ \gamma = \gamma_1,\ \gamma > \alpha,\ \gamma > \beta, \} \Rightarrow \Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1.$$

Здесь больший угол необязательно тупой.

У равных треугольников равны все соответственные элементы, например, радиусы вписанных окружностей ($r = r_1$), площади ($S = S_1$). Этим объясняется большая роль признаков равенства треугольников при решении задач.

1.2. Признаки подобия треугольников, рис. 3 а, б)

1-й признак (по двум углам): если два угла одного треугольника равны соответственно двум углам другого треугольника, то такие треугольники подобны:

$$\begin{cases} \alpha = \alpha_1 \\ \beta = \beta_1 \end{cases} \Rightarrow \Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1.$$

2-й признак (по пропорциональности двух сторон и углу между ними): если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника и углы, образованные этими сторонами, равны, то такие треугольники подобны:

$$\begin{cases} \dfrac{a}{a_1} = \dfrac{b}{b_1} \\ \gamma = \gamma_1 \end{cases} \Rightarrow \Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1.$$

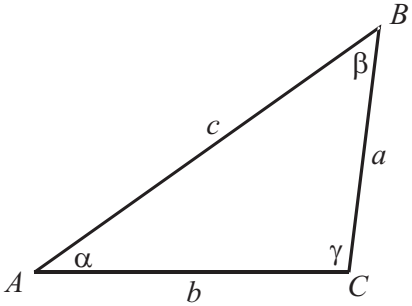

Рис. 3 а)

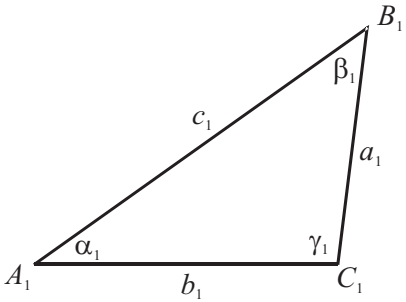

Рис. 3 б)

3-й признак (по пропорциональности трех сторон): если три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники подобны:

$$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1} \Rightarrow \Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1.$$

У подобных треугольников:

- отношение длин любых сходственных (соответственных) линейных элементов и их линейных комбинаций, например, периметров, равно одному и тому же числу $k > 0$ — коэффициенту подобия, в частности:

$$\frac{a_1}{a} = \frac{r_1}{r} = \frac{p_1}{p} = \frac{h_{a_1}}{h_a} = \ldots = k;$$

- отношение площадей равно квадрату коэффициента подобия

$$\frac{S_1}{S} = k^2.$$

Этим объясняется большая роль признаков подобия при решении задач.

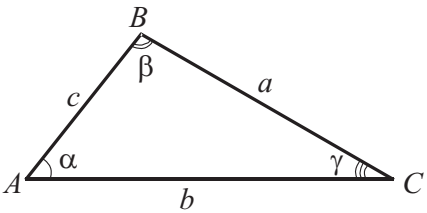

Рис. 4

1.3. Неравенство треугольника (рис. 4).

1) *Любая сторона треугольника меньше суммы двух других его сторон*, т.е.

$a < b + c$, $b < a + c$, $c < a + b$.

2) *Любая сторона треугольника больше модуля разности двух других его сторон*, т.е.

$a > |b - c|$, $b > |c - a|$, $c > |a - b|$.

3) Если известно, какая из длин a, b, c наибольшая или наименьшая, то для существования треугольника $\Delta(a, b, c)$ достаточно выполнения только одного неравенства, а именно: из трех отрезков с длинами $a \geq b \geq c$ можно составить треугольник $\Delta(a, b, c)$ тогда и только тогда, когда:

- наибольшая из длин меньше суммы двух других длин ($a < b + c$) или
- наименьшая из длин больше модуля разности двух других длин ($c > |a - b|$).

Если неизвестно, какая из длин a, b, c наибольшая и наименьшая, то для существования треугольника $\Delta(a, b, c)$ достаточно выполнения одного из следующих соотношений:

$$|b - c| < a < b + c;\ |c - a| < b < c + a;\ |a - b| < c < a + b.$$

1.4. Сумма углов треугольника

Сумма углов треугольника равна 180°, т.е. $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.

Следствия. 1) *Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних углов, не смежных с ним*, т.е. $\gamma' = \alpha + \beta$, $\beta' = \gamma + \alpha$, $\alpha' = \beta + \gamma$;

2) *Сумма внешних углов треугольника (и любого выпуклого многоугольника) равна 360°*, т.е. $\alpha' + \beta' + \gamma' = 360°$ (рис. 5).

1.5. Теорема косинусов

Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других его сторон без удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними, т.е. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$, $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos\beta$, $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$.

Следствие. Косинус любого угла треугольника выражается через его стороны:

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc},\ \cos\beta = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca},\ \cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

Отсюда можно получить классификацию треугольников относительно углов, если заданы стороны треугольника:

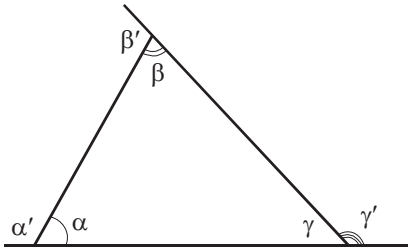

Рис. 5

1.5.1. Если квадрат большей стороны треугольника меньше суммы квадратов двух других его сторон, то треугольник *остроугольный*;

1.5.2. Если квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других его сторон, то треугольник *прямоугольный* (теорема, обратная теореме Пифагора);

1.5.3. Если квадрат стороны треугольника больше суммы квадратов двух других его сторон, то треугольник *тупоугольный*.

1.6. Теорема синусов

1.6.1. *Отношение стороны треугольника к синусу противолежащего угла есть величина постоянная для данного треугольника, равная диаметру описанной окружности*:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R.$$

Теорема достойна и удивления и восхищения. Ведь только двумя элементами — длиной стороны и синусом противолежащего ей угла ($\sin\alpha$) произвольный треугольник не задан. Однако радиус R его описанной окружности уже известен! Почему?

Разгадка — в теореме о вписанных углах.

Подробнее об этом — в главе 8 (или в [13; 21]; иллюстрация — на рис. 6.

1.6.2. Нахождение угла α треугольника по значению его косинуса ($\cos\alpha$) и синуса ($\sin\alpha$).

Значение $\cos\alpha$ однозначно определяет угол α (рис. 7 а):

$$\begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \\ 0 < \alpha < \pi \end{cases} \Rightarrow \alpha = \arccos\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc},$$

так как функция $y = \cos\alpha$ монотонная при $\alpha \in [0;\pi]$.

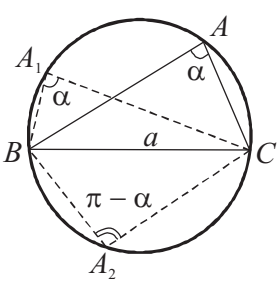

Рис. 6

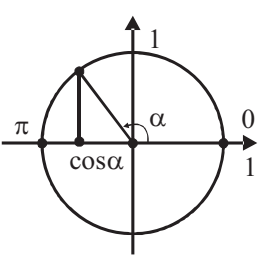

Рис. 7 а)

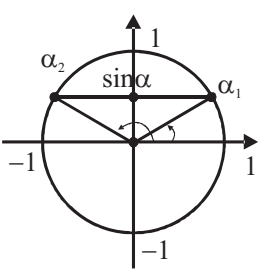

Рис. 7 б)

Значению $\sin\alpha \neq 1$ соответствуют два различных угла (рис. 7 б): α_1 — острый, $\alpha_2 = \pi - \alpha_1$ — тупой, так как функция $y = \sin\alpha$ не монотонна при $\alpha \in [0;\pi]$.

1.7. Средняя линия треугольников

Средняя линия треугольника (отрезок, соединяющий середины двух его сторон) параллельна третьей стороне и равна ее половине.

Следствие. *Три средние линии разбивают треугольник на четыре равных треугольника, каждый из которых подобен данному (с коэффициентом подобия 1:2)* (рис. 8).

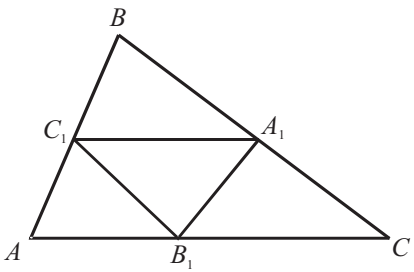

Рис. 8

1.8. Высота треугольника (перпендикуляр, опущенный из вершины треугольника на прямую, содержащую противоположную сторону)

1.8.1. *Большей стороне треугольника соответствует меньшая высота,* т.е. $a < b < c \Leftrightarrow h_a > h_b > h_c$ (рис. 9–11).

1.8.2. В остроугольном треугольнике все высоты расположены внутри треугольника, в прямоугольном треугольнике две высоты со-

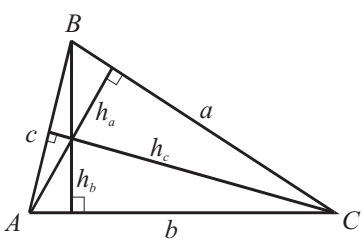

Рис. 9

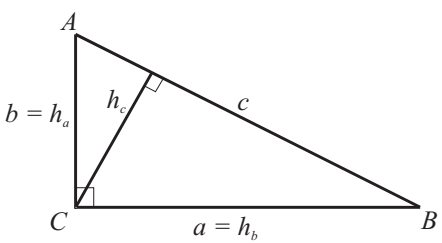

Рис. 10

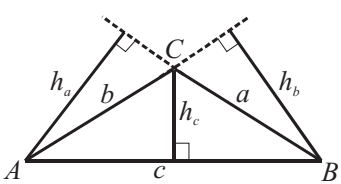

Рис. 11

впадают со сторонами (катетами), в тупоугольном треугольнике две высоты расположены вне треугольника.

1.8.3. Три высоты треугольника (для тупоугольного — прямые, их содержащие) пересекаются в одной точке, называемой *ортоцентром* треугольника.

1.8.4. Вычисление высоты треугольника.

Высота равна отношению удвоенной площади треугольника к основанию, т.е. $h_a = \frac{2S}{a}$, $h_b = \frac{2S}{b}$, $h_c = \frac{2S}{c}$.

1.9. Медиана треугольника (отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны)

1.9.1. *Большей стороне треугольника соответствует меньшая медиана*, т.е. $a < b < c \Leftrightarrow m_a > m_b > h_c$.

1.9.2. *Три медианы треугольника пересекаются в одной точке (называемой центроидом треугольника) и делятся ею в отношении 2:1, считая от вершины*, т.е. $\frac{AM}{MA_1} = \frac{BM}{MB_1} = \frac{CM}{MC_1} = \frac{2}{1}$ (рис. 12).

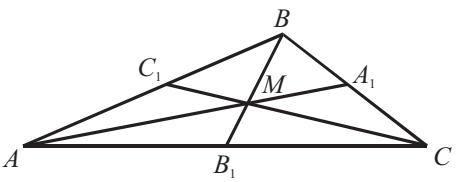

Рис. 12

1.9.3. Медиана треугольника делит его на два равновеликих треугольника (т.е. на два треугольника равной площади).

1.9.4. Три медианы треугольника делят его на шесть равновеликих частей.

1.9.5. Точка пересечения медиан является его центром тяжести: $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{0}$, где $\vec{F}_1 = \vec{MA}$; $\vec{F}_2 = \vec{MB}$; $\vec{F}_3 = \vec{MC}$, $\vec{0}$ — нулевой вектор.

1.9.6. Вычисление медианы треугольника по трем его сторонам.

Квадрат медианы, проведенной к стороне треугольника, равен одной четвертой разности удвоенной суммы квадратов двух других его сторон и квадрата данной стороны, т.е.

$$m_a^2 = \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2);\ m_b^2 = \frac{1}{4}(2c^2 + 2a^2 - b^2);\ m_c^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2b^2 - c^2).$$

Следствие. *Сумма квадратов всех медиан треугольника составляет три четверти суммы квадратов всех его сторон*, т.е.

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2).$$

Рекомендация. Медиану полезно продлить до получения параллелограмма, как это показано в двух типовых задачах.

Задача 1. *Даны* длины a, b, c сторон треугольника ABC.

Найти длину m_a его медианы AA_1 (рис. 13).

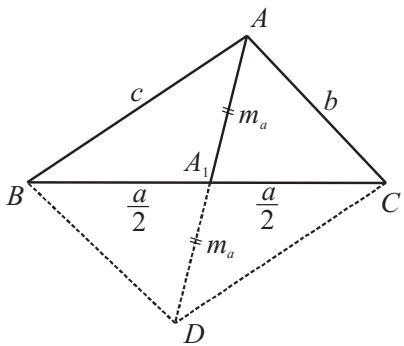

Рис. 13

Решение. На прямой AA_1 отложим $A_1D = m_a$. Получим параллелограмм $ABCD$ (так как диагонали AD и BC точкой пересечения делятся пополам). В нем *сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов всех сторон*:

$$AD^2 + BC^2 = 2(AC^2 + AB^2);\ (2m_a)^2 + a^2 = 2(b^2 + c^2).$$

Ответ: $m_a = \dfrac{\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}}{2}$.

Задача 2. *Даны* длины m_a, m_b, m_c медиан треугольника ABC.

Найти длину a его стороны BC (рис. 14).

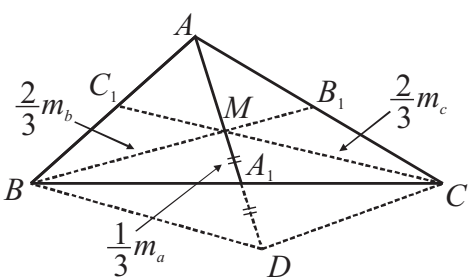

Рис. 14

Решение. В ΔMBC известны две стороны: $\frac{2}{3}m_b$, $\frac{2}{3}m_c$ и медиана $MA_1 = \frac{1}{3}m_a$. Продлим ее (отложим $A_1D = A_1M$) до параллелограмма $MBDC$. В нем

$$BC^2 + MD^2 = 2(BM^2 + CM^2);\ a^2 + \left(\frac{2}{3}m_a\right)^2 = 2\left(\left(\frac{2}{3}m_b\right)^2 + \left(\frac{2}{3}m_c\right)^2\right).$$

Ответ: $a = \frac{2}{3}\sqrt{2m_b^2 + 2m_c^2 - m_a^2}$.

Комментарий. Мы убедились, что медиана «любит продлиться» до параллелограмма, предлагая нам далее использовать его метрическое свойство — связь длин диагоналей и всех сторон. Закрепим этот методический прием еще одной задачей.

Задача 3. (Мех.-мат. МГУ, 1973). *В трапеции диагонали равны 3 и 5, а отрезок, соединяющий середины оснований, равен 2* (рис. 15).

Найти площадь трапеции.

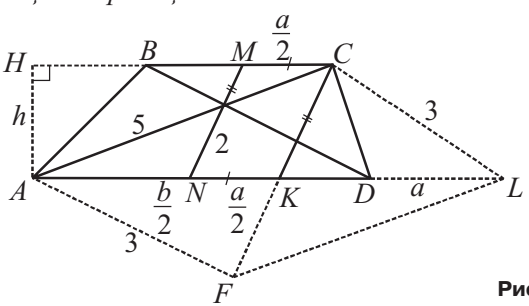

Рис. 15

Решение. По условию $AC = 5$, $BD = 3$, $MN = 2$. Пусть $BC = a$, $AD = b$, $AH = h$. Проведем $CL \parallel BD$, $CK \parallel MN$. Тогда $S_{ABCD} = S_{\Delta ACL} = \frac{1}{2}(AD + BC) \times$ $\times AH = \frac{a+b}{2} \cdot h$, $AK = AN + NK = \frac{b}{2} + \frac{a}{2} = \frac{1}{2}AL$. Значит, достаточно найти площадь ΔACL со сторонами $AC = 5$, $CL = BD = 3$ и медианой $CK = MN = 2$.

Продлим медиану до параллелограмма $ACLF$ (проведем $KF = CK$). Нам нужна половина его площади: $S_{\Delta ACL} = S_{\Delta ACF}$. Но $\angle AFC = 90°$, так как

$$AC^2 = AF^2 + CF^2 \Leftrightarrow 5^2 = 3^2 + 4^2 \Leftrightarrow 25 = 25.$$

Значит, $S_{\Delta ACF} = \frac{1}{2} \cdot AF \cdot CF = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 6.$

Ответ: 6.

Комментарий. Использовали тот же прием: медиану CK в ΔACL продлили до параллелограмма, что позволило легко закончить решение. Используем его в следующей задаче.

Задача 4. В ΔABC стороны $AB = c$, $AC = b$, медиана $AA_1 = m_a$ (рис. 16).

Найти площадь ΔABC.

Решение. Продлим медиану AA_1 до параллелограмма $BACD$, проведя $A_1D = AA_1 = m_a$. Получим $S_{\Delta ABC} = S_{\Delta ABD}\,(b;\ c;\ 2m_a)$.

По формуле Герона имеем:

Ответ: $S_{\Delta ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-2m_a)}$, где $p = \dfrac{b+c+2m_a}{2}$.

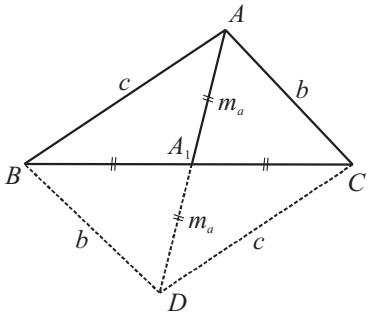

Рис. 16

1.10. Биссектриса треугольника (отрезок, соединяющий вершину треугольника с точкой на противоположной стороне и делящий пополам угол при этой вершине)

1.10.1. Большей стороне треугольника соответствует меньшая биссектриса, т.е. $a < b < c \Leftrightarrow l_a > l_b > l_c$.

1.10.2. Три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке (эта точка равноудалена от сторон треугольника и является центром окружности, вписанной в данный треугольник).

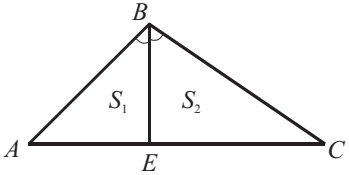

Рис. 17

1.10.3. Биссектриса треугольника делит противолежащую сторону и площадь треугольника на части, пропорциональные прилежащим сторонам (рис. 17), т.е. $\dfrac{AE}{CE} = \dfrac{AB}{CB}$, $\dfrac{S_1}{S_2} = \dfrac{AB}{CB}$.

1.10.4. Вычисление биссектрисы треугольника (см. часть II).

1.11. Площадь треугольника

1.11.1. *Площадь треугольника равна половине произведения основания на высоту*, т.е.

$$S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c.$$

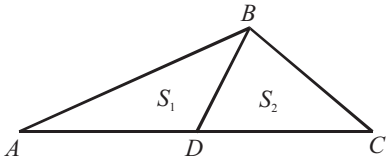

Рис. 18

Следствие 1. *Отношение площадей треугольников с равными высотами равно отношению оснований* (рис. 18), т.е. $S_1 : S_2 = AD : CD$.

Следствие 2. *Стороны треугольника обратно пропорциональны соответствующим высотам*, т.е. $a : \frac{1}{h_a} = b : \frac{1}{h_b} = c : \frac{1}{h_c} = 2S$.

Следствие 3. *Любой треугольник подобен треугольнику, стороны которого есть величины, обратные высотам данного треугольника, с коэффициентом подобия, равным 2S*, т.е.

$$\Delta(a;\, b;\, c) \overset{k=2S}{\backsim} \Delta\left(\frac{1}{h_a}; \frac{1}{h_b}; \frac{1}{h_c}\right).$$

(Указанное следствие позволяет легко получить формулу вычисления площади треугольника по его высотам.)

Следствие 4. *Числа h_a, h_b, h_c являются высотами некоторого треугольника тогда и только тогда, когда обратные им величины удовлетворяют неравенствам треугольника*, т.е.

$$\frac{1}{h_a} < \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}, \quad \frac{1}{h_b} < \frac{1}{h_c} + \frac{1}{h_a}, \quad \frac{1}{h_c} < \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b}.$$

Если $a \geq b \geq c$, то $h_a \leq h_b \leq h_c$, $\frac{1}{h_a} \geq \frac{1}{h_b} \geq \frac{1}{h_c}$ и для существования треугольника достаточно выполнения одного неравенства (см. 1.3):

$$\frac{1}{h_a} < \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} \text{ или } \frac{1}{h_c} > \frac{1}{h_a} - \frac{1}{h_b}.$$

Следствие 5. *Отношение площадей треугольников с равными основаниями равно отношению соответствующих высот.*

Используя указанный факт и подобие прямоугольных треугольников, легко показать, что: для любых двух точек E и F на прямой l, проходящей через вершину B и точку D основания AC треугольника ABC, от-

ношение площадей треугольников AEF и CEF равно отношению отрезков основания AD и CD, т.е. $S_{AEF} : S_{CEF} = AD : CD$ (рис. 19).

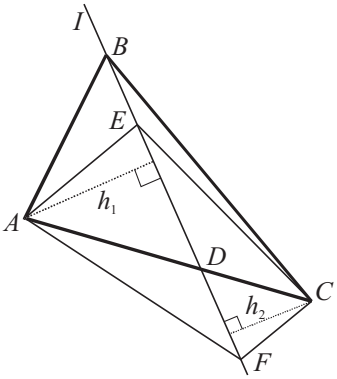

Рис. 19

1.11.2. *Площадь треугольника равна половине произведения двух его сторон на синус угла между ними*, т.е.

$$S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{1}{2}bc\sin\alpha = \frac{1}{2}ca\sin\beta.$$

Следствие 1. *Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов*, т.е.

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}.$$

(Данное утверждение составляет содержание теоремы синусов — см. 1.6.)

Следствие 2. *Отношение площадей треугольников, имеющих общий угол, равно отношению произведений сторон этого угла*, т.е.

$$S_{ABC} : S_{A_1BC_1} = (AB \cdot CB) : (A_1B \cdot C_1B),$$

или

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A_1BC_1}} = \frac{AB}{A_1B} \cdot \frac{CB}{C_1B} \text{ (рис. 20).}$$

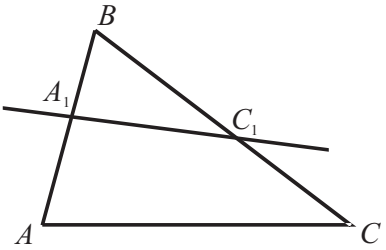

Рис. 20

1.11.3. Формула Герона: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$,

где $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$.

Следствие 1. Из 1.8.4 и формулы Герона имеем формулы вычисления высот по сторонам треугольника:

$$h_a = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \quad h_b = \frac{2}{b}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

$$h_c = \frac{2}{c}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Следствие 2. Для сторон треугольника выполняется неравенство

$$2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) - a^4 - b^4 - c^4 > 0,$$

так как

$$2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) - a^4 - b^4 - c^4 = 16p(p-a)(p-b)(p-c) = 16S^2 > 0.$$

1.11.4. Площадь треугольника равна отношению произведения всех его сторон к учетверенному радиусу описанной окружности, т.е.

$$S = \frac{abc}{4R}.$$

1.11.5. Площадь треугольника равна произведению полупериметра и радиуса вписанной окружности, т.е. $S = pr$.

1.12. Вписанная окружность

1.12.1. Центр вписанной окружности есть точка пересечения биссектрис треугольника.

1.12.2. Радиус вписанной окружности равен отношению площади треугольника к его полупериметру, т.е. $r = \frac{S}{p}$, где $\frac{1}{2}(a+b+c)$ (рис. 21).

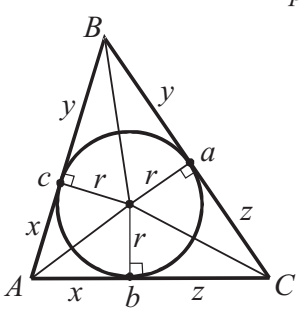

Рис. 21

Следствие.

$$r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}.$$

1.12.3. Точка касания вписанной окружности разбивает сторону треугольника на две касательных, причем:

$$\begin{cases} a = y + z \\ b = z + x \\ c = x + y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{b + c - a}{2} = p - a \\ y = \dfrac{a + c - b}{2} = p - b \\ z = \dfrac{b + a - c}{2} = p - c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = x + y + z, \\ S = \sqrt{xyz(x + y + z)}, \\ r = \sqrt{\dfrac{xyz}{x + y + z}}. \end{cases}$$

Следствия:

1. *Длина касательной равна разности полупериметра и противоположной стороны.*

2. *В прямоугольном треугольнике длина радиуса вписанной окружности равна длине касательной при вершине прямого угла, т.е.*

$$r = z; \quad r = p - c = \frac{a + b - c}{2} \text{ (рис. 22).}$$

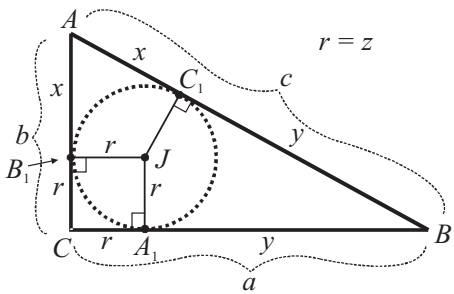

Рис. 22

Комментарий.

Не любая тройка a, b, c положительных чисел может служить сторонами треугольника. Но любая тройка x, y, z положительных чисел является касательными к вписанной окружности некоторого треугольника. Действительно, пусть для определенности $0 < x \le y \le z$. Тогда тройке чисел (x, y, z) соответствует тройка чисел (a, b, c), где $a = y + z$, $b = z + x$, $c = x + y$, причем $a \ge b \ge c$ и $a < b + c \Leftrightarrow y + z < z + x + x + y \Leftrightarrow x > 0$ — верно. То есть выполнены неравенства треугольника — даже самая большая сторона меньше суммы двух других его сторон.

Выводы: любой тройке положительных чисел (x, y, z) соответствует тройка чисел (a, b, c) — длин сторон треугольника.

1.13. Описанная окружность

1.13.1. Центр описанной окружности есть точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника (рис. 23).

1.13.2. Радиус описанной окружности равен отношению произведения всех сторон треугольника к учетверенной площади, т.е. $R = \dfrac{abc}{4S}$ (см. 1.11.4).

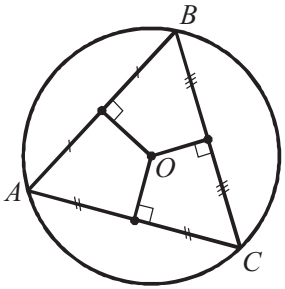

Рис. 23

Следствие.

$$R = \frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}} = \frac{abc}{\sqrt{2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) - a^4 - b^4 - c^4}}.$$

1.13.3. Отношение сторон треугольника к синусу противолежащего угла равно удвоенному радиусу описанной окружности, т.е.

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R \text{ (см. п. 1.6).}$$

2. Прямоугольный треугольник

2.1. Признаки равенства прямоугольных треугольников

1-й признак (по двум катетам): если два катета одного треугольника равны соответственно двум катетам другого треугольника, то такие треугольника равны.

2-й признак (по катету и острому углу):

а) если катет и прилежащий ему острый угол одного треугольника равны соответственно катету и прилежащему острому углу другого треугольника, то такие треугольники равны;

б) если катет и противолежащий острый угол одного треугольника равны соответственно катету и противолежащему острому углу другого треугольника, то такие треугольники равны.

3-й признак (по гипотезе и острому углу): если гипотенуза и острый угол одного треугольника равны соответственно гипотенузе и острому углу другого треугольника, то такие треугольники равны.

4-й признак (по гипотенузе и катету): если гипотенуза и катет одного треугольника равны соответственно гипотенузе и катету другого треугольника, то такие треугольники равны.

Оглавление