В. И. Сидельников

А ЧТО, ЕСЛИ ИНАЧЕ?

Москва
Илекса
2022

УДК 512.13:37.022
ББК 74.262.21
С34

Рецензент:
кандидат физико-математических наук,
доцент *Севрюков П.Ф.*

Сидельников В.И.
С34 А что, если иначе?: учеб. пособие. – М. : Илекса, 2022. – 68 с.
ISBN 978-5-89237-706-5

Да, задача уже решена, ответ получен, но стоит задуматься: «А что, если иначе? Может проблему можно решить надёжнее, проще?». Думается, что такой подход к решению проблем – это и есть путь к развитию творческого мышления, к прогрессу.

В учебном пособии на простых примерах и заданиях предлагаются различные подходы, способы, методы решения математических задач. Приведены методические указания к решениям, значительное количество подробно решенных задач (как несложных, типовых, так и повышенной сложности), а также упражнений, адресованных учащимся для самостоятельного решения. Предлагаемое вниманию читателя пособие содержит краткие теоретические сведения по математике школьного курса и чуть более.

Надеюсь, что данное учебное пособие будет полезно учителям математики и репетиторам, а также учащимся, проявляющим интерес к самостоятельному изучению математики.

УДК 512.13:37.022
ББК 74.262.21

ISBN 978-5-89237-706-5

ВВЕДЕНИЕ

> «Доводы, до которых человек додумывается сам, обычно убеждают его больше, нежели те, которые пришли в голову другим».
>
> *Б. Паскаль*

Для кого из ребят интересна математика? Да, математику любят в основном те ученики, у которых получается решать задачи. Научив их решать задачи разными способами, мы окажем существенное влияние на их интерес к предмету, на развитие мышления. Обучение в школе должно ориентироваться на развитие творческого мышления, обеспечивающего возможность самостоятельно приобретать новые знания.

Обучение не может ориентироваться на один, даже очень эффективный метод решения задач, неизбежно приводящий к недооценке других. Необходима реализация системы принципов, которые определяются особенностями развития школьников.

Среди всех мотивов учебной деятельности самым действенным является познавательный интерес, возникающий в процессе обучения. Он не только активизирует умственную деятельность в данный момент, но и направляет ее к последующему решению различных задач.

Устойчивый познавательный интерес формируется разными средствами. Одним из них является решение задач разными способами.

Однако в практике обучения математике различные способы решения ещё не заняли достойного места. Причин этому много, и в частности, недостаточная ориентация на эту работу в учебниках, методических пособиях для учителей. И если не владеть многообразием приёмов, с помощью которых можно отыскать другие способы решения, то без этого невозможно и детей научить находить разные способы решения, и использовать эти способы решения для других целей обучения и воспитания.

Возможные методы решения задач:

– **арифметический метод** (с помощью выполнения последовательности арифметических действий);
– **алгебраический метод** (решение с помощью составления и решения уравнений);
– **практический метод** (решение путем практического выполнения описываемых в задаче действий с реальными предметами или графическими моделями);
– **логический метод** (решение только с помощью логических рассуждений);
– **табличный метод** (решение путем занесения содержания задачи в соответствующим образом составленную таблицу);
– **геометрический метод** (решение путем построения геометрических фигур и использования их свойств в ходе моделирования ситуации задачи и отыскания ответа на вопрос задачи);
– **смешанный метод** (решение с помощью средств, принадлежащих нескольким методам);
– **метод проб и ошибок** (самый примитивный), в нем ответ на вопрос задачи угадывается. Но и здесь основные моменты решения – выбор пробных ответов на вопрос задачи и проверка их соответствия условию – прорабатываются с помощью мыслительных операций, необходимых при решении любым путем. Угадывание ответа требует интуиции, без которой невозможно никакое решение.

Задача представляет собой требование или вопрос, на который надо найти ответ, учитывая те условия, которые указаны в задаче. Поэтому, приступая к решению какой-либо задачи, надо её внимательно изучить, установить, в чем состоят её требования (вопросы), каковы условия, исходя из которых надо решить задачу. Все это называется анализом задачи.

Первое, что можно заметить при чтении задачи: в ней имеются утверждения и требования. Утверждения – условия задачи, требования формулируются в виде вопроса. Поэтому первое, что нужно сделать при анализе задачи, – это расчленить формулировку задачи на условия и требования.

Решение задачи является основным средством развития, при этом основной целью должно являться не получение решения задачи (в смысле ответа), не получение результата решения, а само решение как метод, как процесс, как совокупность логических шагов, приводящих к получению ответа. То есть решение задачи рассматривается как построение математической модели. Математическая модель – это приближенное описание какого-либо класса явлений или объектов реального мира на языке математики. Основные этапы математического моделирования:

I этап. Составление математической модели – это ключевой момент в решении задачи.

На этом этапе осуществляется перевод условия задачи с обыденного языка на математический язык, т.е. выполняется серьезная творческая работа. **Составив математическую модель для решения задачи, стоит задуматься: «А почему не иначе?»** И попробовать взглянуть на придуманный алгоритм с другого ракурса. Ведь, может, существует другой путь (пути?) решения задачи? И, может быть, другой путь рациональнее?

II этап. Работа с составленной моделью.

Эта работа не очень творческая, а чисто техническая, поскольку, действуя по алгоритму, особенно думать не приходится. Стоит только следить за правильностью преобразований или вычислений и опять искать рациональные способы.

III этап. Ответ на вопрос задачи.

1. 8 СПОСОБОВ РЕШЕНИЯ КВАДРАТНОГО УРАВНЕНИЯ

И зачем нужно искать разные способы, чтобы решить квадратное уравнение? Ведь почти любой ученик решает квадратное уравнение по известным формулам с помощью *дискриминанта*. А надо. Надо для того, чтобы развивать творческое, неординарное, значит, свободное мышление ученика. Даже на примере несложных уравнений можно показать красоту математики.

Рассмотрим разные способы решения квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ на примере конкретного уравнения: $3x^2 + 2x - 5 = 0$.

Способ 1.

Решение. Заметим, что в уравнении $3x^2 + 2x - 5 = 0$ сумма коэффициентов и свободного члена равна 0, то есть если вместо x подставим 1, то получим: $3 + 2 - 5 = 0$ – верное равенство. Значит, один корень уравнения найден, он равен 1.

Разделим трёхчлен $3x^2 + 2x - 5$ на $x - 1$ обычным способом, как говорят, «уголком». Как если бы делили, например 12 на 3.

$$\begin{array}{rl|l}
- & 3x^2 + 2x - 5 & x - 1 \\ \cline{3-3}
 & \underline{3x^2 - 3x\phantom{{}-5}} & 3x + 5 \\
- & 5x - 5 & \\
 & \underline{5x - 5} &
\end{array}$$

Получим разложение трёхчлена на множители $(x - 1)(3x + 5) = 0$.

Произведение множителей равно 0, когда хотя бы один из множителей равняется нулю, а другой при этом не теряет смысла.

Тогда $x - 1 = 0$, $x_1 = 1$; или $3x + 5 = 0$, $x_2 = -\frac{5}{3}$. Итак: $\left[\begin{array}{l} x_1 = 1, \\ x_2 = -\frac{5}{3}. \end{array}\right.$

Способ 2.

Решение. Так как в уравнении $3x^2 + 2x - 5 = 0$ сумма коэффициентов и свободного члена равна 0, то один корень равен 1.

Разделим всё уравнение на коэффициент при x^2, т.е. на 3:

$$x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{5}{3} = 0,$$

тогда по теореме Виета второй корень равен свободному члену. Итак: $\left[\begin{array}{l} x_1 = 1, \\ x_2 = -\frac{5}{3}. \end{array}\right.$

Способ 3.

Решение. Решим квадратное уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$ традиционным способом по известным формулам – с помощью дискриминанта D:

$$D = b^2 - 4ac,\ x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a},$$

где в уравнении $3x^2 + 2x - 5 = 0$; $a = 3$, $b = 2$, $c = -5$.

$$D = 2^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-5) = 64 = 8^2,\ x = \frac{-2 \pm 8}{2 \cdot 3} = \left[\begin{array}{l} x_1 = 1, \\ x_2 = -\frac{5}{3}. \end{array}\right.$$

Способ 4.

Решение. Для решения уравнения $3x^2 + 2x - 5 = 0$ воспользуемся формулами, когда 2-й коэффициент уравнения чётный (как в данном уравнении).

$$D_1 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac,\ \ x = \frac{\frac{b}{2} \pm \sqrt{D_1}}{a}.$$

$$D_1 = \left(\frac{2}{2}\right)^2 - 3 \cdot (-5) = 16 = 4^2,\ \ x = \frac{-1 \pm 4}{3} = \left[\begin{array}{l} x_1 = 1, \\ x_2 = -\frac{5}{3}. \end{array}\right.$$

Способ 5.

Решение. Применим теорему Виета (если быть строгим, теорему, обратную теореме Виета) для уравнения вида $ax^2 + bx + c = 0$:

$$\begin{cases} x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}, \\ x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}. \end{cases}$$

Для уравнения $3x^2 + 2x - 5 = 0$ получим: $\begin{cases} x_1 \cdot x_2 = -\dfrac{5}{3}, \\ x_1 + x_2 = -\dfrac{2}{3}. \end{cases}$ (1)

Подставим в систему (1) число 1, самый простой случай $x_1 = 1$, и умножаем число 1 на свободный член: $1 \cdot x_2 = -\frac{5}{3}$, $x_2 = -\frac{5}{3}$.

Подставим корни во второе уравнение системы (1):

$1 - \frac{5}{3} = -\frac{2}{3}$, $-\frac{2}{3} = -\frac{2}{3}$ – верное равенство. Имеем: $\left[\begin{array}{l} x_1 = 1, \\ x_2 = -\dfrac{5}{3}. \end{array}\right.$

Способ 6. Метод «переброски».

Решение. В уравнении $3x^2 + 2x - 5 = 0$ «перебросим» множителем первый коэффициент 3 к свободному члену, получим вспомогательное уравнение:

$$x^2 + 2x - 3 \cdot 5 = 0,$$
$$x^2 + 2x - 15 = 0.$$

С помощью теоремы, обратной теореме Виета, подберём корни:

$$\begin{cases} x_1 \cdot x_2 = -15, \\ x_1 + x_2 = -2. \end{cases}$$

Это будут числа –5 и 3. Корни вспомогательного уравнения делим на перебрасываемое число 3: $3 : 3 = 1$; $-5 : 3 = -\frac{5}{3}$.

Получим $\left[\begin{array}{l} x_1 = 1, \\ x_2 = -\dfrac{5}{3}. \end{array}\right.$

Способ 7. Способ основан на выделении полного квадрата.

Решение. Используем формулу: $a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 = (a + b)^2$.

Уравнение $3x^2 + 2x - 5 = 0$ разделим на 3 и приведём к виду:

$$x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{5}{3} = 0.$$

Выполним преобразование левой части уравнения

$$x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 - \frac{5}{3} = \left(x + \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{9} - \frac{5}{3} =$$
$$= \left(x + \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{16}{9} = \left(x + \frac{1}{3}\right)^2 - \left(\frac{4}{3}\right)^2.$$

Разложив $\left(x+\frac{1}{3}\right)^2-\left(\frac{4}{3}\right)^2$ по формуле разности квадратов, перейдём к уравнению:

$$\left(x+\frac{1}{3}-\frac{4}{3}\right)\left(x+\frac{1}{3}+\frac{4}{3}\right)=0.$$

Произведение множителей равно 0, когда хотя бы один из множителей равняется нулю, а другой при этом не теряет смысла, тогда:

$$\left(x+\frac{1}{3}-\frac{4}{3}\right)=0 \text{ или } \left(x+\frac{1}{3}+\frac{4}{3}\right)=0,$$

$$x-1=0 \text{ или } x+\frac{5}{3}=0,$$

$$x=1 \text{ или } x=-\frac{5}{3},$$

$$\left[\begin{array}{l} x_1=1, \\ x_2=-\frac{5}{3}. \end{array}\right.$$

Способ 8. Применим способ группировки.

Решение. Представим выражение $2x$ уравнения $3x^2+2x-5=0$ в виде: $2x=-3x+5x$.

Тогда $3x^2+2x-5=3x^2-3x+5x-5=3x(x-1)+5(x-1)=$ $=(x-1)(3x+5)$; $(x-1)(3x+5)=0$.

Произведение множителей равно 0, когда хотя бы один из множителей равняется нулю, а другой при этом не теряет смысла, тогда: $x-1=0$, $x=1$ или $3x+5=0$, $x=-\frac{5}{3}$. $\left[\begin{array}{l} x_1=1, \\ x_2=-\frac{5}{3}. \end{array}\right.$

Примечание. Для уравнения $ax^2+bx+c=0$, если $a+c=b$, то уравнение имеет корень $x=-1$. Например: $3x^2+5x+2=0$; $4x^2+7x+3=0$.

Содержание