Л. С. Сагателова

ОРТОГОНАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ И РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ПО СТЕРЕОМЕТРИИ

10—11 классы

Москва
ИЛЕКСА
2022

УДК 372.851:514.113
ББК 22.151.0:74.202.5я721
С12

Сагателова Л. С.

С12 Ортогональное проектирование и решение задач по стереометрии. 10–11 классы. / Л. С. Сагателова — М. : Илекса, 2022. — 80 с. : ил.

ISBN 978-5-89237-690-7

Пособие «Ортогональное проектирование и решение задач по стереометрии» содержит некоторые факты и методы решения стереометрических задач, которым в школе по тем или иным причинам не уделяется должного внимания. В пособии рассматриваются задачи, которые встречаются на ЕГЭ и вызывают затруднения.

Теоретический материал сопровождается значительным количеством разнообразных задач, достаточных для его усвоения и закрепления.

Пособие адресовано учащимся 10–11 классов, учителям математики общеобразовательных учреждений, методистам, студентам педагогических вузов и репетиторам.

УДК 372.851:514.113
ББК 22151.0:74.202.5я721

ISBN 978-5-89237-690-7

ОГЛАВЛЕНИЕ

В задачах по элементарной геометрии
приходится пользоваться очень остроумными,
подчас тонкими приемами, и тот, кто
в своей молодости вкусил их прелесть,
никогда их не забудет.

Э. Борель

ВВЕДЕНИЕ

Учебное пособие «Ортогональное проектирование и решение задач по стереометрии» познакомит учащихся с некоторыми фактами и методами решения стереометрических задач, которым в школе по тем или иным причинам не уделяется должного внимания. Теоретический материал сопровождается значительным количеством разнообразных задач различной сложности. Приводятся примеры решения задач, а также задачи для самостоятельного решения, к которым даны ответы. В пособии рассматриваются задачи, которые встречаются на ЕГЭ и вызывают затруднения.

Хочется поблагодарить профессора МГППУ Е. Д. Куланина, внимательно прочитавшего рукопись и высказавшего ряд важных замечаний, способствовавших улучшению пособия.

1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И СВОЙСТВА

Пусть в пространстве задана плоскость α и прямая l, перпендикулярная плоскости α. Возьмем в пространстве точку M и проведем через неё прямую m, параллельную l (если $M \in l$, то в качестве m берется сама прямая l). Точку пересечения M_0 прямой с плоскостью α называют ортогональной проекцией точки M на эту плоскость. Для краткости будем говорить «проекция» вместо «ортогональная проекция».

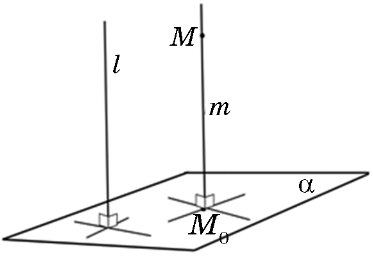

Рис. 1, а

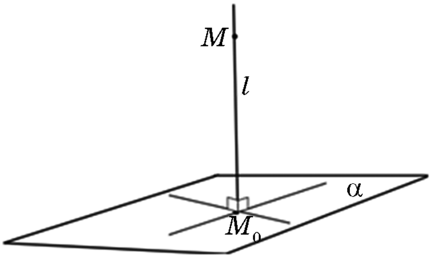

Рис. 1, б

Ортогональным проектированием называется параллельное проектирование в направлении прямой, перпендикулярной плоскости проектирования.

Проекцией какой-либо фигуры на плоскость α называется фигура на этой плоскости, образованная проекциями всех точек исходной фигуры.

Понятия «проектирование» и «проецирование» являются синонимами и взаимозаменяемыми в значении «воспроизводить изображение рисунков, фотоснимков» и т. д. В геометрии: проектировать — изображать какую-либо фигуру на плоскости, чертить проекции[1].

[1] Математическая энциклопедия / Гл. ред. И. М. Виноградов. — М.: Советская энциклопедия, т. 4. — 1984. — С. 687.

Свойства ортогонального проектирования

(Будем исходить из предположения, что рассматриваемые отрезки и прямые не перпендикулярны плоскости проекции).

1. *Проекцией фигуры, лежащей на плоскости проекции, является сама эта фигура.*

2. *Проекцией прямой (отрезка) является прямая (отрезок).*

3. *Отношение длин параллельных отрезков равно отношению длин их проекций.*

4. *Площадь ортогональной проекции многоугольника равна площади этого многоугольника, умноженной на косинус угла между плоскостью многоугольника и плоскостью проекции:* $S_{\text{пр}} = S\cos\varphi$.

Для развития умения изображать пространственные фигуры на плоскости и закрепления свойств ортогональных проекций предлагается решить следующие упражнения, заимствованные из [6].

1. Верно ли, что ортогональной проекцией прямоугольного треугольника является прямоугольный треугольник?

2. Может ли площадь проектируемой фигуры быть больше или меньше площади исходной фигуры?

3. Приведите пример фигуры в пространстве, ортогональными проекциями которой на две взаимно перпендикулярные плоскости являются круги одинакового радиуса.

4. Диагонали ромба равны 10 и 4. Плоскость ромба составляет с плоскостью проекции угол 60°. Найдите площадь проекции ромба.

5. Найдите ортогональную проекцию ромба, одна из диагоналей которого перпендикулярна плоскости проекции.

6. Треугольник $A_1B_1C_1$ является ортогональной проекцией треугольника ABC, причем отрезки AA_1, BB_1, CC_1 равны соответственно высотам A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 треугольника $A_1B_1C_1$. Докажите, что треугольники A_1B_1C, A_1BC_1, AB_1C_1 равновелики.

7. Изобразите в горизонтальной и вертикальной проекциях:

а) цилиндр с просверленным вдоль отверстием;

б) шар со сквозным цилиндрическим отверстием.

8. Докажите, что если одна из сторон прямого угла параллельна плоскости проекции, а другая перпендикулярна этой плоскости, то ортогональная проекция прямого угла также является прямым углом.

9. Докажите, что при ортогональном проектировании:

а) равновеликие треугольники, лежащие в одной плоскости, имеют равновеликие проекции;

б) равные треугольники, лежащие в одной плоскости, не обязательно переходят в равные треугольники;

в) тупой (острый) угол не обязательно переходит в тупой (острый) угол.

10. Найдите ортогональную проекцию куба на плоскость, перпендикулярную его диагонали.

11. Найдите площадь ортогональной проекции куба на плоскость, перпендикулярную его диагонали, если известно, что ребро куба равно a.

12. Ортогональная проекция параллелепипеда на плоскость, перпендикулярную его диагонали, является правильным шестиугольником. Верно ли, что этот параллелепипед обязан быть кубом?

13. Докажите, что проекцией правильного тетраэдра на плоскость, параллельную двум его скрещивающимся ребрам, является квадрат. Верно ли обратное?

14. Какой фигурой может быть ортогональная проекция: а) конуса; б) усеченного конуса?

15. Какой фигурой может быть ортогональная проекция цилиндра?

2. ПРИМЕНЕНИЕ СВОЙСТВ ОРТОГОНАЛЬНОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ ПРИ НАХОЖДЕНИИ ЭЛЕМЕНТОВ МНОГОГРАННИКОВ

При решении задач по стереометрии в старшей школе можно эффективно применять ортогональное проектирование. Зависимости, существующие между острым углом и его ортогональными проекциями на две взаимно перпендикулярные плоскости, позволяют определять значения параметров, входящих в различные формулы, связанные с многогранниками.

Фигура, образованная острым углом α и его проекциями на взаимно перпендикулярные плоскости — углами β и γ, является прямоугольным (прямым) трехгранным углом.

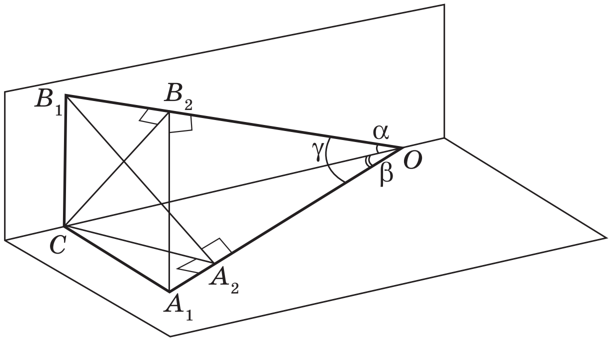

Рис. 2

Рассмотрим прямой двугранный угол с ребром OC и острый угол A_1OB_1, стороны которого лежат в его гранях. $\angle OCA_1 = \angle OCB_1 = 90°$, $\angle OA_2C = \angle OB_2C = 90°$. Введем обозначения: $\angle B_1OC = \alpha$, $\angle A_1OC = \beta$, $\angle A_1OB_1 = \gamma$. Пусть A — линейный угол двугранного угла с ребром OA_1, а B — линейный угол двугранного угла с ребром OB_1. Таким образом, получили трехгранный угол OA_1B_1C с ребрами OA_1, OB_1, OC и прямым двугранным углом при ребре OC (см. рис. 2).

Между острыми плоскими и двугранными углами прямоугольного трехгранного угла OA_1B_1C существуют следующие зависимости:

$$\cos\gamma = \cos\alpha \cdot \cos\beta, \quad (1)$$
$$\sin\beta = \sin B \cdot \sin\gamma, \quad (2)$$
$$\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg} B \cdot \sin\alpha, \quad (3)$$
$$\operatorname{tg}\alpha = \cos B \cdot \operatorname{tg}\gamma, \quad (4)$$
$$\cos\gamma = \operatorname{ctg} A \cdot \operatorname{ctg} B, \quad (5)$$
$$\cos A = \sin B \cdot \cos\alpha. \quad (6)$$

Данные зависимости можно доказать, рассмотрев прямоугольные треугольники, в которых лежат соответствующие углы. Предварительно следует выяснить, какие из треугольников на рис. 2 прямоугольные, назвать углы, равные A и B, и показать, что оба эти угла — острые.

Докажем, например, равенства (1) и (5).

Пусть $OA_1 = a$. Из треугольников OB_2A_1 и A_1OС найдем OB_2 и OC:

$$OB_2 = a \cdot \cos\gamma, \quad OC = a \cdot \cos\beta.$$

В треугольнике OB_2C имеем $\cos\alpha = OB_2 : OC = \cos\gamma : \cos\beta$, откуда $\cos\gamma = \cos\alpha \cdot \cos\beta$.

Пусть $OB_1 = b$. Из треугольников OCB_1 и OA_2C найдем CB_1 и CA_2:

$$CB_1 = b \cdot \sin\alpha,\ CA_2 = OC \cdot \sin\beta = b \cdot \cos\alpha \cdot \sin\beta.$$

Из треугольника A_2CB_1 выразим CB_1:

$$CB_1 = CA_2 \cdot \operatorname{tg} A = b \cdot \cos\alpha \cdot \sin\beta \cdot \operatorname{tg} A.$$

Таким образом, $b \cdot \sin\alpha = b \cdot \cos\alpha \cdot \sin\beta \cdot \operatorname{tg} A$, откуда $\operatorname{tg}\alpha = \sin\beta \cdot \operatorname{tg} A$ (7).

Перемножим почленно равенства (3) и (7), затем разделим обе части нового равенства на $\sin\alpha \cdot \sin\beta \neq 0$, получим

$$\frac{1}{\cos\alpha} \cdot \frac{1}{\cos\beta} = \operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B.$$

Воспользовавшись равенством (1), получим:

$$\frac{1}{\cos\gamma} = \operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B, \text{ откуда } \cos\gamma = \operatorname{ctg} A \cdot \operatorname{ctg} B.$$

Умелое использование указанных зависимостей позволяет упростить решение многих стереометрических задач. Предлагается система упражнений на применение формул (1)—(6). В этих упражнениях рассматриваются те же углы и используются те же обозначения, что были введены ранее.

1. Используя данные формулы, определите:

а) $\cos\beta$, если $\alpha = 30°$, $\gamma = 60°$;

б) $\cos B$, если $\beta = 30°$, $\gamma = 45°$;

в) $\operatorname{tg} B$, если $A = 60°$, $\alpha = 45°$;

г) $\sin\beta$, если $B = 45°$, $\alpha = 30°$.

2. Существует ли такой прямой трехгранный угол, у которого:

а) $\beta = 45°$, $B = 30°$;

б) $\gamma = 60°$, $\alpha = 45°$;

в) $A = 20°$, $B = 20°$;

г) $B = 60°$, $\alpha = 30°$;

д) $\gamma = 30°$, $\alpha = 30°$;

е) $\gamma > \beta$;

ж) $\beta > B$;

з) $A > \alpha$;

и) $\operatorname{tg}\alpha > \operatorname{tg}\gamma$;

к) $\cos A > \cos\alpha$?

3. Как изменяется (уменьшается или увеличивается) угол γ с увеличением углов α и β?

4. Верно ли, что угол B уменьшается с уменьшением угла β и увеличением угла γ?

5. Верно ли, что угол γ увеличивается с уменьшением угла α при условии, что угол B остается неизменным?

Примеры решения задач

Задача 1. Дан единичный куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точка M — середина ребра BC. Определите двугранный угол, образованный плоскостями B_1AM и AMB.

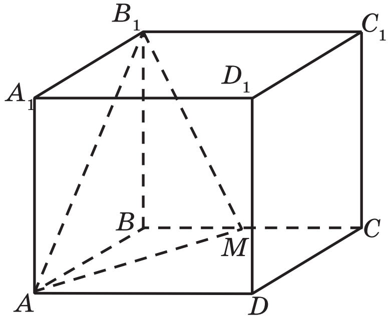

Рис. 3

Р е ш е н и е. Пусть $\varphi = \angle(B_1AM\ ;\ AMB)$. Применим к прямому трехгранному углу ABB_1M формулу (3), предварительно вычислив $\sin\angle BAM$.

$$\sin\angle BAM = BM : AM = \frac{0,5}{\sqrt{1+0,5^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\operatorname{tg}45^\circ}{\sin\angle BAM} = 1 : \frac{1}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}, \quad \varphi = \operatorname{arctg}\sqrt{5}.$$

О т в е т: $\operatorname{arctg}\sqrt{5}$.

Задача 2. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, в котором $\angle AB_1D = \beta$ и $\angle BDB_1 = \alpha$. Вычислите угол ADB.

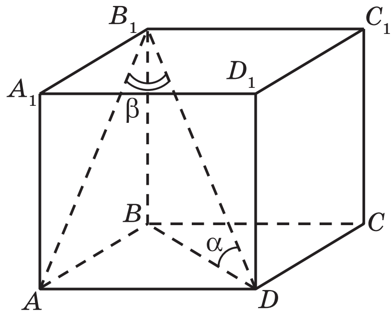

Рис. 4