Л. С. Сагателова

РЕШЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ МЕТОДОМ КООРДИНАТ НА ПЛОСКОСТИ. 9–11 КЛАССЫ

Москва
ИЛЕКСА
2023

УДК 372.851:514.122.1
ББК 22.151.5:74.2025я721
С34

Сагателова Л. С.

С34 Решение геометрических задач методом координат на плоскости. 9—11 классы / Л. С. Сагателова — М. : Илекса, 2023. — 128 с. : ил.

ISBN 978-5-89237-714-0

В учебном пособии представлен раздел школьного курса математики «Метод координат на плоскости», изучаемый в 9 классе общеобразовательной школы. Теоретический материал сопровождается разбором разнообразных задач различной степени сложности, предлагаются задачи для самостоятельной работы, вопросы для самопроверки и диагностические работы. Данное пособие может быть использовано в традиционном учебном процессе в качестве дополнительного учебного пособия к основному учебно-методическому комплексу по предмету. Учебное пособие адресовано учащимся 9–11 классов, учителям математики, студентам педагогических вузов и репетиторам.

УДК 372.851:514.122.1
ББК 22.151.5:74.2025я721

Учебное издание

Сагателова Лиана Сергеевна

РЕШЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ МЕТОДОМ КООРДИНАТ НА ПЛОСКОСТИ. 9–11 КЛАССЫ

Подписано в печать 27.03.2023
Формат 60×88/16. Усл. печ. л. 7,82.
Тираж 1000 экз. Заказ

ООО «Илекса»
+7(964) 534-80-01
real-ilexa@yandex.ru
www.ilexa.ru

ISBN 978-5-89237-714-0

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Изучение метода координат на плоскости предусмотрено базовым курсом школьной математики, но при этом данная тема недостаточно прорабатывается на уроках геометрии и выпускники школ в подавляющем большинстве испытывают затруднения в решении простейших задач названного раздела геометрии.

Пособие содержит теоретический материал, сопровождаемый графическими иллюстрациями, исторический материал, подробно разобранные задачи различной степени сложности. Разнообразный дидактический материал дает возможность отбирать дополнительные задания для учащихся разной степени подготовки. Материал, представленный в пособии, может быть эффективно использован как на уроках геометрии, так и в самостоятельной работе учащихся. Предлагаемый материал адресован учащимся 9 классов общеобразовательных школ, а также будет полезен учащимся 10–11 классов при подготовке к ЕГЭ.

1. ДЕКАРТОВЫ КООРДИНАТЫ НА ПЛОСКОСТИ

Историческая справка

Основоположником аналитической (координатной) геометрии является французский математик и философ Рене Декарт (1596–1650). Им был разработан и впервые применен метод координат, связавший друг с другом геометрические и алгебраические понятия.

Книга, обессмертившая имя Рене Декарта, в которой были изложены основы аналитической геометрии, появилась в 1637 г. в голландском городе Лейдене. Книга имела длинное по обычаю своего времени название — «Рассуждение о методе, позволяющем направлять разум и отыскивать истину в науках. Кроме того, Диоптрика, Метеоры и Геометрия, которые являются приложением этого метода». Метод координат, созданный Декартом, позволил установить тесную связь между алгеброй и геометрией.

Рене Декарт подчеркивал, что в основе научной теории должны лежать ясные и простые принципы, позволяющие изучать, описывать, классифицировать явления природы, проводить эксперименты и математические расчеты. По мнению Декарта, изучая природу, нужно полагаться лишь на свои силы, а не ждать помощи свыше, божественного откровения. Эти взгляды ученого были несовместимы с теологией и схоластикой, и в 1663 г., через 13 лет после его смерти от воспаления легких вдали от родины, сочинения Декарта были внесены в список книг, запрещенных католической церковью. Несмотря на это, научные идеи Декарта быстро распространялись по всей Европе, оказывая глубокое воздействии на умы его современников.

К сочинению «Рассуждение о методе...» Декарт написал три приложения, которые должны были разъяснить и проиллюстрировать его научные методы, — «Диоптрику», «Метеоры» и «Геометрию». Последнее приложение обессмертило имя ученого в большей степени, чем все другие его открытия. Прямоугольная система координат, которой мы пользуемся, называется декартовой системой координат в честь ее создателя. Введение понятия координат было первым реальным фундаментальным вкладом в геометрию после древних греков.

Однако прямоугольная система координат использовалась в геометрии еще до нашей эры. Математик александрийской школы Аполлоний Пергский, живший в III–II вв. до н. э., уже фактически пользовался прямоугольными координатами. Он определял и изучал с их помощью хорошо известные в то время кривые: параболу, гиперболу и эллипс. Во времена Аполлония Пергского не существовало еще алгебраической символики и уравнения кривых описывались с помощью геометрических понятий.

Р. Декарт внес в прямоугольную систему координат очень важное усовершенствование, введя правила выбора знаков. Большой вклад в развитие аналитической геометрии внес и другой французский математик — Пьер Ферма (1601–1665), пришедший почти к тем же самым идеям и почти в то же время. Он был математиком-любителем и о своих открытиях сообщал в письмах своим друзьям. Введение системы координат послужило основой для создания Исааком Ньютоном и Готфридом Лейбницем дифференциального и интегрального исчисления.

Применяя метод координат, можно решать задачи двух видов:

1) применять алгебру к геометрии, задавая фигуры уравнениями и выражая в координатах геометрические соотношения;

2) применять геометрию к алгебре, пользуясь координатами, интерпретировать уравнения и неравенства геометрически.

1.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ, УТВЕРЖДЕНИЯ И ФОРМУЛЫ МЕТОДА КООРДИНАТ НА ПЛОСКОСТИ

Аналитическая (координатная) геометрия является разделом математики, в котором геометрические образы (точки, линии, поверхности) изучаются с помощью алгебраических методов. Положение любой точки плоскости определяется с помощью метода координат, в основе которого лежит построение системы координат, позволяющей численно описать положение точки плоскости. Таких систем существует довольно много. Одной из таких систем является прямоугольная (декартова) система координат.

Прямоугольная система координат задается двумя взаимно перпендикулярными прямыми — осями, на каждой из которых выбрано положительное направление и задан единичный отрезок. Единицу масштаба обычно выбирают одинаковый для всех осей. Эти оси называются осями координат, точка пересечения осей O — началом координат. Одну из осей называют осью абсцисс (от лат. *abscissus* — отрезанный, отсеченный), другую — осью ординат от лат. *ordinatus* — «упорядоченный»). Оси координат делят плоскость на четыре области — четверти (квадранты), или координатные углы, которые нумеруют римскими цифрами I, II, III, IV. Каждая из четвертей имеет свои особенности. Каждой точке плоскости ставится в соответствие пара чисел — координаты этой точки.

Абсциссой, или x-координатой точки, называется координата основания перпендикуляра, опущенного из точки на ось Ox, ординатой, или y-координатой точки, называется координата основания перпендикуляра, опущенного из точки на ось Oy. Началу координат соответствует пара (0; 0); у любой точки оси абсцисс ордината равна нулю, у любой точки оси ординат абсцисса равна нулю. Таким образом, между точками плоскости и упорядоченными парами действительных чисел существует взаимно однозначное соответствие.

Фигурой называется геометрическое место точек плоскости, обладающих некоторым свойством.

1.1.1. РАССТОЯНИЕ МЕЖДУ ДВУМЯ ТОЧКАМИ

Если $M_1(x_1)$ и $M_2(x_2)$ — две точки числовой прямой, то расстояние между этими точками находится по формуле:

$$d = M_1M_2 = |x_2 - x_1|.$$

Пусть M — произвольная точка плоскости. При выбранной системе координат каждой точке M плоскости соответствует пара чисел $(x; y)$ — прямоугольные координаты и, обратно, каждой паре чисел $(x; y)$ соответствует только одна точка M плоскости Oxy с абсциссой, равной x, и ординатой, равной y.

Расстояние между точками $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$ находится по формуле

$$M_1M_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Доказательство. Опустим из точек M_1 и M_2 перпендикуляры M_1B и M_2A соответственно на оси Oy и Ox и обозначим через C точку пересечения прямых M_1B и M_2A (рис. 1).

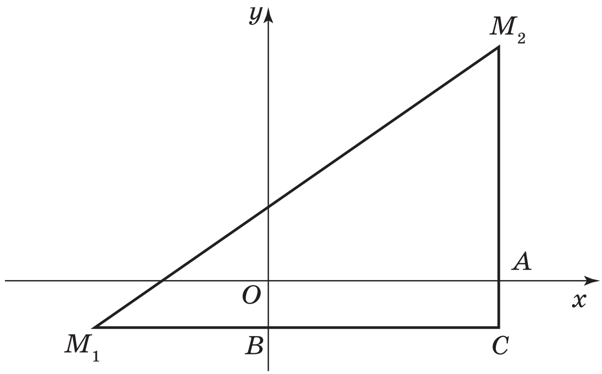

Рис. 1

Точка C имеет координаты $(x_2; y_1)$. $M_1C = |x_1 — x_2|$; $M_2C = |y_2 — y_1|$. Так как треугольник M_1M_2C — прямоугольный, то по теореме Пифагора находим

$$M_1M_2 = \sqrt{(M_1C^2 + M_2C^2)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Что и требовалось доказать.

Задача 1. Найдите длину отрезка AB, заданного точками $A(5; 11)$ и $B(2; 7)$.

Решение. Применим формулу для нахождения длины отрезка $AB = \sqrt{(5-2)^2 + (11-7)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5.$

Ответ: 5.

1.1.2. ДЕЛЕНИЕ ОТРЕЗКА В ДАННОМ ОТНОШЕНИИ

Пусть на плоскости дан произвольный отрезок M_1M_2 и пусть M — точка, лежащая на отрезке M_1M_2 (рис. 2).

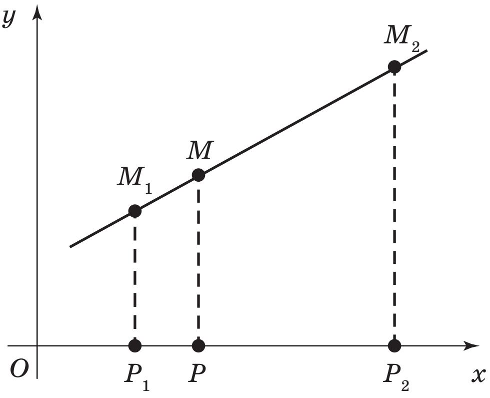

Рис. 2

Число λ, определяемое равенством $\lambda = \dfrac{M_1M}{MM_2}$, называется отношением, в котором точка M делит отрезок M_1M_2. Задача о делении отрезка в данном отношении состоит в том, чтобы по данному отношению λ и данным координатам точек M_1 и M_2 найти координаты точки M. Эту задачу позволяет решить следующая теорема.

Теорема. Если точка $M(x;\ y)$ делит отрезок M_1M_2 в отношении λ, то координаты этой точки определяются формулами: $x = \dfrac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}$; $y = \dfrac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$, где $(x_1;\ y_1)$ — координаты точки M_1; $(x_2;\ y_2)$ — координаты точки M_2.

Доказательство. Пусть прямая M_1M_2 не перпендикулярна оси Ox. Опустим перпендикуляры из точек M_1; M; M_2 на ось Ox и обозначим точки их пересечения с осью Ox соответственно P_1; P и P_2.

На основании теоремы о пропорциональности отрезков прямых, заключенных между параллельными прямыми, заключаем, что

$$\frac{P_1P}{PP_2} = \frac{M_1M}{MM_2} = \lambda.$$

Расстояние между точками определяется по формулам: $P_1P = |x - x_1|$; $PP_2 = |x_2 - x|$. Так как числа $(x - x_1)$ и $(x_2 - x)$ имеют один и тот же знак (при $x_1 < x_2$ они положительны, а при $x_1 > x_2$ отрицательны), то $\lambda = \dfrac{|x - x_1|}{|x_2 - x|} = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x}$.

Поэтому $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x} = \lambda$, откуда $x = \dfrac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}$. Если прямая $M_1M_2 \perp Ox$, то $x_1 = x_2 = x$ и эта формула также верна. Формула для y выводится аналогично.

Следствие 1. Если $M_1(x_1;\ y_1)$ и $M_2(x_2;\ y_2)$ — две произвольные точки и точка $M(x;\ y)$ — середина отрезка M_1M_2, т. е. $M_1M = MM_2$, то $\lambda = 1$ и формула примет вид: $x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$; $y = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$, таким образом, каждая координата середины отрезка равна полусумме соответствующих координат.

Задача 2. Даны точки $M_1(-2;\ 3)$ и $M_2(4;\ 6)$. Отрезок, ограниченный этими точками, разделен точкой M в отношении $\lambda = 2$. Найдите координаты точки $M(x;\ y)$, делящей отрезок M_1M_2.

Решение. По формулам $x = \dfrac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}$ и $y = \dfrac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$ находим $x = \dfrac{-2 + 2 \cdot 4}{1 + 2} = 2$; $y = \dfrac{3 + 2 \cdot 6}{1 + 2} = 5$. Следовательно, $x = 2$; $y = 5$ — координаты точки деления.

Ответ: $M(2;\ 5)$.

Следствие 2. Точка M делит отрезок M_1M_2 в отношении λ; при $\lambda > 0$ точка M принадлежит отрезку M_1M_2, а при $\lambda < 0$ точка M лежит на прямой M_1M_2 вне отрезка M_1M_2 и $\dfrac{MM_1}{M_1M_2} = -\lambda$; $\lambda \neq -1$.

Центр тяжести (масс) треугольника находится в точке пересечения его медиан, которая делит каждую из медиан в отношении 2 : 1, считая от вершины, ее координаты $\left(\dfrac{x_1 + x_2 + x_3}{3};\ \dfrac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$. Эта точка называется *центроидом треугольника*.

Историческая справка

Задачу о точке пересечения медиан в III в. до н. э. решил Архимед, используя идею центра тяжести трех материальных точек одинаковой массы m, помещенных в вершины треугольника ABC. Тогда, по Архимеду, центром масс двух материальных точек B и C будет середина отрезка BC — точка A_1 с массой $2m$, а центр тяжести всей системы будет лежать на медиане AA_1. По правилу рычага («золотое правило механики») центр масс точек A, B и C — точка M — делит медиану AA_1 в отношении 2 : 1, считая от точки A. Аналогично рассуждая, приходим к выводу, что точка M лежит на медианах BB_1 и CC_1 и делит их в том же отношении. Барицентрические (от греч. βαρυς — тяжелый) соображения при решении этой задачи оказываются эффективными и при решении других задач и геометрических теорем, что побудило Архимеда создать особый метод для решения геометрических задач на языке механики, который он изложил в послании к Эратосфену. В дальнейшем метод Архимеда был развит великими математиками (Папп Александрийский, Джованни Чева, Пауль Гюльден, Симон Люилье, Леонард Эйлер, Жозеф Луи Лагранж, Карл Густав Якоби, Август Фердинанд Мебиус и др.) и превратился в эффективное и строго обоснованное средство геометрического исследования.

Задача 3. Найдите координаты центра тяжести однородной пластинки, имеющей форму треугольника с вершинами $A(-2; 1)$, $B(2; -1)$, $C(4; 3)$.

Решение 1. Пусть AP — медиана треугольника ABC. Найдем координаты точки P: $x_p = \dfrac{2+4}{2} = 3$; $y_p = \dfrac{-1+3}{2} = 1$.

Итак, $P(3; 1)$. Точка M — точка пересечения медиан делит каждую из медиан в отношении 2 : 1, считая от вершины, следовательно $AM : MP = 2 : 1$. Следовательно, $\lambda = 2$.

Найдем координаты точки M.

$$x_M = \frac{-2+2\cdot 3}{1+2} = \frac{4}{3};\ y_M = \frac{1+2}{1+2} = 1.\ \text{Итак, } M\left(\frac{4}{3}; 1\right).$$

Ответ: $M\left(\dfrac{4}{3}; 1\right)$.

Решение 2. Найдем координаты точки пересечения медиан $M\left(\dfrac{x_A + x_B + x_C}{3}; \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3}\right)$: $x_M = \dfrac{-2+2+4}{3} = \dfrac{4}{3}$;

$$y_M = \frac{1-1+3}{3} = 1.$$

Итак, $M\left(\frac{4}{3}; 1\right)$.

О т в е т: $M\left(\frac{4}{3}; 1\right)$.

1.1.3. ПЛОЩАДЬ ТРЕУГОЛЬНИКА

Теорема. Для любых трех точек $A(x_1;\ y_1)$, $C(x_2;\ y_2)$ и $B(x_3;\ y_3)$, не лежащих на одной прямой, площадь S треугольника ABC вычисляется по формуле $S = \frac{1}{2}\left|(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)\right|$.

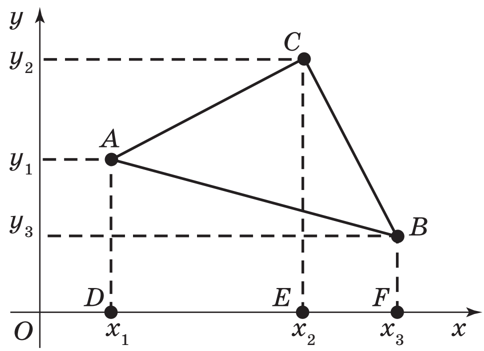

Рис. 3

Д о к а з а т е л ь с т в о. Площадь треугольника ABC можно найти следующим образом: $S = S_{DACE} + S_{ECBF} - S_{DABF}$ (*).

Выражая площадь каждой трапеции через координаты точек A, B, C, находим:

$$S_{ADEC} = DE \cdot \frac{AD + EC}{2} = \frac{(x_2 - x_1)\cdot(y_1 + y_2)}{2};$$

$$S_{BCEF} = EF \cdot \frac{EC + BF}{2} = \frac{(x_3 - x_2)\cdot(y_2 + y_3)}{2};$$

$$S_{ABFD} = DF \cdot \frac{AD + BF}{2} = \frac{(x_3 - x_1)\cdot(y_1 + y_3)}{2}.$$

Подставив эти выражения в равенство (*), после несложных преобразований получим формулу:

$$S = \frac{1}{2}\left|(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)\right|.$$

Данная формула верна для любого расположения точек A, B и C на плоскости при условии, что обход вершин $A \to B \to C$ совершается против часовой стрелки.

Задача 4. Даны точки $A(1;\ 1)$, $B(6;\ 4)$, $C(8;\ 2)$. Найдите площадь треугольника ABC.

Решение. Воспользуемся формулой

$$S = \frac{1}{2}\left|(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)\right|.$$

$$S = \frac{1}{2}\left|((6-1)(2-1) - (8-1)(4-1))\right| = \frac{1}{2}\left|-15\right| = 7{,}5.$$

Следовательно, $S_{\Delta ABC} = 7{,}5$.

Ответ: 7,5.

Задачи для самостоятельного решения

1. Точки $A(3;\ 2)$ и $B(a;\ -1)$ расположены на прямой, параллельной оси Oy. Найдите значение a.

Ответ: 3.

2. Определите, какая из точек $A(2;\ -5)$ или $B(3;\ 4)$, находится дальше от: а) оси Ox; б) оси Oy; в) от начала координат?

3. Найдите расстояние между точками $A(2;\ 4)$ и $B(5;\ 8)$.

Ответ: 5.

3. Найдите площадь четырехугольника, если известны координаты его вершин $A(4;\ 1)$, $B(3;\ 5)$, $C(-1;\ 4)$ и $D(0;\ 0)$.

Ответ: 17.

4. На оси Ox найдите точку, расстояние от которой до точки $A(3;\ 4)$ равно 5.

Ответ: (6; 0), (0; 0).

5. Найдите третью вершину равнобедренного треугольника ABC с основанием BC, где $B(3;\ 7)$ и $C(-1;\ -5)$, если она лежит на оси абсцисс.

Ответ: $A(4;\ 0)$.

6. Найдите третью вершину равнобедренного треугольника ABC с основанием BC, где $B(3;\ 7)$ и $C(-1;\ -5)$, если она имеет равные по абсолютной величине координаты.

Ответ: $A(-2;\ 2)$.

7. Даны точки $A(3;\ 8)$ и $M(7;\ -5)$. Найдите координаты точки B, если точка M является серединой отрезка AB.

Ответ: $B(11;\ -18)$.

34. Вершинами треугольника служат точки $A(-2;\ 1)$, $B(2; 2)$, $C(4; y)$. Площадь треугольника равна 15. Определите ординату вершины C.

Ответ: $y = 10$ или $y = -5$.

35. Площадь треугольника ABC равна 3, две его вершины — точки $A(3;\ 1)$ и $B(1;\ -3)$. Найдите координаты третьей вершины, если известно, что она лежит на оси ординат.

Ответ: $C(0;\ -8)$ или $C(0;\ -2)$.

36. Площадь параллелограмма равна 12, две его вершины — точки $A(-1;\ 3)$ и $B(-2;\ 4)$. Найдите две другие вершины параллелограмма, если известно, что точка пересечения его диагоналей лежит на оси абсцисс.

Ответ: $C(-7;\ -3)$, $D(-6;\ -4)$ или $C(17;\ -3)$, $D(18;\ -4)$.

37. Точки $A(3;\ 6)$, $B(-1;\ 3)$ и $C(2;\ -1)$ — вершины треугольника. Найдите длину его высоты, проведенной из вершины C.

Ответ: 5.

38. Точки $A(3;\ 7)$, $B(2;\ -3)$ и $C(-1;\ 4)$ — вершины треугольника. Найдите длину его высоты, опущенной из вершины B на сторону AC.

Ответ: 7,4.

39. Найдите площадь пятиугольника с вершинами в точках $A(0;\ 0)$, $B(3;\ -2)$, $C(5;\ -1)$, $D(8;\ 4)$, $E(4;\ 5)$.

Ответ: 29,5.

40. Даны две вершины равностороннего треугольника: $A(-2;\ 2)$, $B(-2;\ -4)$. Найдите координаты третьей вершины треугольника и его площадь.

Ответ: $\left(-2+3\sqrt{3};\ -1\right)$ или $\left(-2-3\sqrt{3};\ -1\right)$, $S = 9\sqrt{3}$.

Вопросы для самопроверки

1. В чем состоит взаимно однозначное соответствие между числами и точками координатной плоскости?

2. Запишите формулу для нахождения расстояния между двумя точками.

3. Запишите формулу для вычисления площади треугольника.

4. В каком случае координаты точек деления отрезка равны полусумме соответствующих координат?

Проверочная работа

Вариант I

Даны координаты точек $A(-1;\ 1)$, $B(3;\ 4)$, $M(1;\ 0)$. Найдите:

1) координаты точки E, делящей отрезок AB в отношении $\lambda = 2{,}5$;

2) координаты вершин параллелограмма $ABCD$, если точка M является точкой пересечения диагоналей;

3) периметр $ABCD$;

4) площадь треугольника ABM.

Вариант 2

Даны координаты точек $A(-3;\ -1)$, $B(1;\ 2)$, $M(-1;\ -2)$. Найдите:

1) координаты точки E, делящей отрезок AB в отношении $\lambda = 2{,}5$;

2) координаты вершин параллелограмма $ABCD$, если точка M является точкой пересечения диагоналей;

3) периметр параллелограмма $ABCD$;

4) площадь треугольника ABM.

Контрольная работа № 1

Метод координат на плоскости

Вариант 1

1. Точки A, B, C и D заданы своими координатами $A(-5;\ 3)$, $B(3;\ 1)$, $C(8;\ 9)$, $D(-2;\ -7)$. Найдите расстояние между серединой отрезка BC и точкой, делящей отрезок AD в отношении $1 : 2$, считая от A.

2. Известны координаты вершин параллелограмма $ABCD$: $A(-2;\ 3)$, $B(-1;\ 4)$, $D(9;\ 1)$. Найдите координаты вершины C.

3. Даны вершины треугольника ABC: $A(-3;\ -5)$, $B(2;\ 7)$, $C(5;\ 1)$. Найдите:

а) длины его сторон;

б) площадь треугольника ABC;

в) координаты точки пересечения медиан.

4. а) Даны точки $A(1;\ 1)$, $B(5;\ 2)$. Найдите все точки C оси абсцисс, для которых треугольник ABC — прямоугольный.

б) Даны точки $A(2;\ 1)$, $B(3;\ 6)$. Найдите все точки C оси ординат, для которых треугольник ABC — равнобедренный.