О.Е. ДАНЧЕНКО

Школьная математическая олимпиада

Оценка и пример

5–7 классы

Москва
Илекса
2024

УДК 372.851:37.026.6
ББК 22.12:74.202.8я721
Д17

Данченко О.Е.

Д17 Школьная математическая олимпиада. Оценка и пример. 5–7 классы. — М.: ИЛЕКСА, 2024. — 77 с.

ISBN 978-5-89237-698-3

Пособие посвящено задачам, которые принято называть задачами на оценку и пример. Задачи этой тематики широко представлены на различных олимпиадах и турнирах. В курс школьной математики такие задачи не включены, что делает решение их на олимпиадах затруднительным для большого круга детей. Большинство задач, рассмотренных в книжке, являются классическими для этого раздела математики.

В основу данного пособия легли задачи различных математических олимпиад 5–7 класса. В пособие включены основные методы решения задач этой тематики: метод непересекающихся областей, метод раскраски, разумный перебор и другие. Каждая глава начинается с небольшой истории, которая подводит к идее решения задач. Далее идет разбор нескольких задач, а затем следуют задачи для самостоятельного решения. В конце книги приведены решения ко всем задачам пособия. Данное пособие можно использовать при организации кружков в школе и для самостоятельной подготовки к олимпиадам.

Пособие рассчитано на учеников 5–7 классов. Большая часть материала не предполагает специальных предварительных знаний и может быть использована школьниками общеобразовательных школ. Наконец, это пособие может быть полезно преподавателям, ведущим математические кружки.

УДК 372.851:37.026.6
ББК 22.12:74.202.8я721

ISBN 978-5-89237-698-3

Предисловие

Работая в школе и посещая со своими учениками различные математические олимпиады, выезжая с ними на турниры математических боев, я замечала, что ученикам очень сложно даются задачи, которые принято называть задачами на «оценку + пример». Нет ни одной олимпиады, в которой бы не нашлось задачи на эту тему: «Зимний Архимед» (6–7 классы), «Математический праздник» (6–7 классы), личный тур «Весеннего Архимеда» (5 класс), Устная математическая олимпиада (6–7 класс), турниры математических боев имени А.П. Савина (5–8 классы), турнир *«Kostroma-Open»* (6–9 классы), Уральский турнир юных математиков (6–8 классы), турнир *«Tatarstan math open»* (5–7 классы). Но, несмотря на то, что задачи данного типа встречаются часто, большинство учеников испытывают затруднения, решая их.

Данная книга позволяет ученикам 5–7 классов познакомиться с данной темой. Ее могут использовать учителя для подготовки занятий математических кружков или уроков занимательной математики. Родители, не имеющие педагогического опыта, могут изучать эту тему со своими детьми, что особенно актуально в связи с увеличением числа детей на семейном обучении. Также ее могут самостоятельно изучать сами дети. Каждая глава начинается с истории, которая в интересной и доступной форме знакомит читателя с темой.

Несмотря на простоту некоторых задач, их решение развивает математическую грамотность и учит последовательно и аргументированно выражать свои мысли. Данная тема тесно связана с другими видами работы, которые часто встречаются на математических олимпиадах: методом раскраски, принципом крайнего, разумным перебором, инвариантом.

Основной материал разбит на шесть глав. В первой главе вы познакомитесь с данной темой, узнаете отличительные особенности задач на «оценку + пример». В последующих главах вы познакомитесь с основными идеями, которые помогут вам в решении подобных задач. В начале каждой главы разобраны несколько задач; данный разбор учителя и родители могут использовать в работе учеников с темой. Далее идут задачи для самостоятельного решения. Их можно использовать для составления материалов занятий математического кружка или урока. В конце книги вы найдете решения всех задач для самостоятельного решения.

Для понимания материала и решения большинства задач не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы 5–7 классов. Достаточно общей эрудиции и логического мышления.

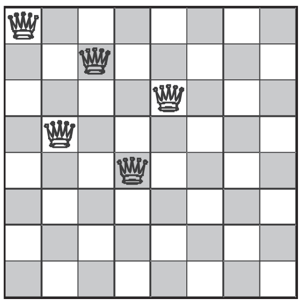
Надеюсь, данная книга вдохновит вас заниматься олимпиадной математикой, а также поможет вам более успешно выступать на различных олимпиадах, если вы уже принимали в них участие ранее.

Автор

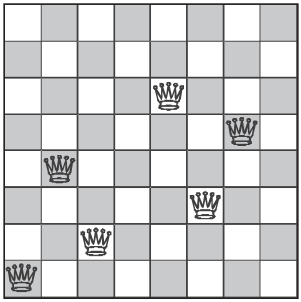
Глава 1. Что такое оценка, и зачем нужен пример

Ситуация 1. Участникам шахматного кружка предложили поставить на шахматную доску как можно больше ферзей так, чтобы они не били друг друга (ферзь бьет все клетки шахматной доски, расположенные на одной горизонтали, вертикали и диагонали с той клеткой, на которой стоит ферзь).

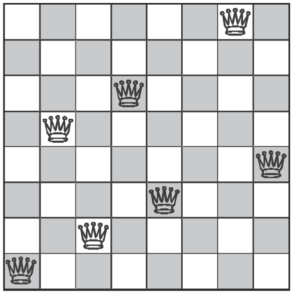
— Получается поставить не более 5 фигур, — сказал Петя и показал расстановку. — Ни одного ферзя теперь добавить не получится! — резюмировал он.



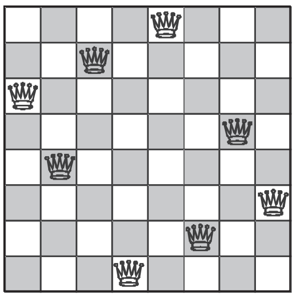
— Ты прав, что нельзя добавить новых ферзей на твою доску, — ответила Таня. — Но смотри, я поставила немного по-другому, и у меня поместилось 6 ферзей. Ни одного не добавить!



— А если поставить как я, то можно и 7, — ответил Толя, — как и у вас, нового ферзя добавить нельзя. Ферзей не более 7.



— Неправда! У меня 8 получилось поставить, — ответил Ваня, — девятого не получается пока.



— Каждый из вас ставил фигуры так, что ни одного нового ферзя поставить не получалось. Но у другого оказывалась более удачная расстановка фигур. Может, 8 фигур не самое большое число! Мы просто не нашли более удачной расстановки. А если мы ее найдем, как понять, что это именно она? — спросил Олег, самый дотошный шахматист.

— Когда мы находим расстановку, которую не получается улучшить, означает ли это, что она самая наилучшая? Именно «оценка» позволяет ответить на вопрос: действительно ли найденный пример дает наибольшее возможное число фигур. Как видно из вышеприведенного примера, это не так просто.

— Давайте разберемся, почему были неправы первые три ученика. Попробуем оценить наибольшее возможное число ферзей на доске, не бьющих друг друга. Рассмотрим одну любую строку (я бы сказал «любую горизонтальную строку шахматной доски»). В ней может стоять не более одного ферзя, поскольку два или более ферзей в этой строке будут бить друг друга. На доске всего 8 строк, и поэтому более 8 не бьющих друг друга (ферзей) на доске стоять не может. Четвертый шахматист действительно нашел наибольшее число (ферзей).

Ситуация 2. Несколько учителей вошли в новый кабинет.

— Интересно, — сказал один из них, — какое максимальное число детей может учиться в этом классе?

— Учеников тут может быть не больше, чем детей учится в школе, — заявил Евгений Федорович.

— Это слишком! Все наши ученики и в трех таких кабинетах не поместятся. Давайте разделим объем этого помещения на объем, занимаемый одним ребенком. Больше точно не поместится! — возразил ему Павел Викторович.

— Простите, но дети не могут висеть в воздухе! Давайте посчитаем площадь пола и разделим на площадь, которую занимает один ученик. Больше поместиться в кабинет не может, — вмешался в разговор Сергей Георгиевич.

— Но коллега, а мебель? Надо учесть только ту площадь, которая свободна. Больше этого количества детей быть не могло, — отозвался Дмитрий Викторович.

— К сожалению, и Вы не правы. Каждый ученик должен сидеть за партой, в этом кабинете их всего 20. И больше учеников тут учиться не сможет. В моем классе как раз 20 учеников, и я готов их рассадить прямо сейчас, — подвел итог Федор Андреевич.

Каждый из учителей был абсолютно прав в своей оценке. Учеников не могло быть больше, чем утверждал каждый из них. Но только Федор Андреевич дал верный ответ, поскольку не только объяснил ограничение детей по численности, но и убедился, что указанное число детей может обучаться в классе.

Обоснование ответа в каждой задаче должно состоять из двух частей:

1. **Оценка** — в этой части должно быть доказано, что больше (меньше) указанного значения получить нельзя.

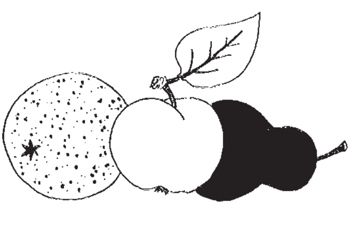
2. **Пример** — в этой части должен быть приведен конкретный пример, подтверждающий, что указанное значение получить возможно.

Может быть построено несколько различных примеров, подтверждающих полученную оценку. Но для обоснования ответа достаточно привести любой из них.

Рассмотрим несколько задач.

Задачи для обсуждения

Задача 1. В ряд выложили несколько апельсинов, мандаринов, яблок и груш. Известно, что рядом с фруктом каждого вида можно найти фрукт любого другого вида. Какое наименьшее количество фруктов могло быть выложено?



Решение.

Оценка. У каждого фрукта в ряду не больше двух соседей. Если фрукт какого-то конкретного вида встречается только один раз, то рядом с ним могут находиться фрукты не более двух других видов. Но по условию рядом с каждым фруктом должен лежать фрукт каждого из трех оставшихся видов. Значит, каждый вид фруктов встречается не меньше двух раз. Следовательно, фруктов не менее, чем $2 \cdot 4 = 8$.

Пример. Покажем, что восьми фруктов достаточно.

А М Я Г М Я А Г.

Ответ. 8 фруктов.

Задача 2. В понедельник в школьную библиотеку пришли 5 учеников, во вторник — 6, в среду — 4, в четверг — 8, в пятницу — 7. Никто из учеников не был в библиотеке два дня подряд. Какое наименьшее количество учеников побывало в библиотеке с понедельника по пятницу?

Решение.

Оценка. Рассмотрим два последовательных дня, в которые пришло самое большое число учеников. Поскольку в четверг и в пятницу пришли разные дети, учеников должно быть не менее $8 + 7 = 15$.

Пример. Покажем, что возможно распределить 15 учеников по дням так, что условие задачи будет выполняться.

Присвоим ученикам номера от 1 до 15. Тогда:

ПН: 1–5 ученик; ВТ: 6–11 ученик; СР: 12–15 ученик; ЧТ: 1–8 ученик; ПТ: 9–15 ученик.

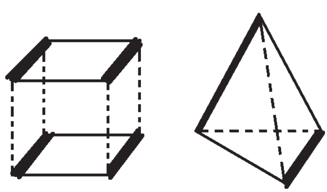
Ответ. 15 учеников.

Задача 3. В какое наименьшее количество цветов можно покрасить ребра: а) куба; б) тетраэдра так, чтобы каждое ребро было покрашено одним цветом и любые два ребра, имеющие общую вершину, были бы покрашены в разные цвета?

Решение.

Оценка. В обоих случаях в одной вершине сходятся три ребра. Значит, цветов должно быть не менее трех.

Пример. Покажем, что пример раскраски с тремя цветами есть.



Ответ. а) три цвета; б) три цвета.

Задача 4. На сковороде умещается не более двух блинов. Для готовности каждый блин должен обжариваться с двух сторон. Время обжаривания одной стороны блина – 5 минут. За какое наименьшее время можно приготовить три блина?

Решение.

Оценка. Всего надо обжарить шесть сторон. За 5 минут можно обжарить не более двух сторон. Значит, потребуется не менее $6 \times 5 : 2 = 15$ минут.

Пример. Покажем, что за 15 минут пожарить блины возможно. Положим на сковороду 2 блина. За 5 минут обжарим их с одной стороны. Один блин снимем со сковороды, заменив третьим, а второй перевернем. Через 10 минут получим один готовый блин и два обжаренных с одной стороны. За оставшиеся 5 минут дожарим оставшиеся блины.

Ответ. 15 минут.

Задача 5. В турнире участвуют четыре команды. Турнир проходит в один круг и состоит из трех туров. В каждом из них команды разбиваются на пары и играют между собой, команда должна сыграть с каждой ровно один раз. За победу дают 2 очка, за ничью — 1 очко, за поражение — 0 очков. После каждого тура команда получает медаль, если в этот момент у нее очков больше, чем у любой другой. Если такой команды нет, медаль не вручается. Какое наибольшее число команд может оказаться с медалями после окончания турнира?

Решение.

Оценка. Заметим, что в таком турнире будет ровно три тура. Значит, все четыре команды с медалями оказаться не могут.

Пример. Покажем, как могли проходить встречи, чтобы у трех команд были медали.

1 тур. A : B — 2 : 0; C : D — 1 : 1. Итого очков у A — 2; B — 0; C — 1; D — 1. Наградили A.

2 тур. A : C — 0 : 2; B : D — 1 : 1. Итого очков у A — $2 + 0 = 2$; B — $0 + 1 = 1$; C — $1 + 2 = 3$; D — $1 + 1 = 2$. Наградили C.

3 тур. A : D — 0 : 2; B : C — 2 : 0. Итого очков у A — 2 + 0 = 2; B — 1 + + 2 = 3; C — 3 + 0 = 3; D — 2 + 2 = 4. Наградили D.

Ответ. 3 команды.

Задачи для самостоятельного решения

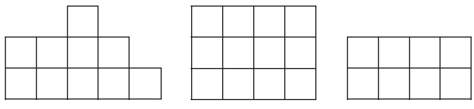
Задача 1.1. Три актера готовятся к спектаклю. С ними работают два опытных гримера. Каждый актер должен быть накрашен и причесан. Накрашивание у каждого актера продолжается полчаса, а причесывание — только 10 минут. Как быстро актеры смогут подготовиться к выходу на сцену?

Задача 1.2. Обезьяна становится счастливой, когда съедает три разных фрукта. Какое наибольшее количество обезьян можно осчастливить, имея 20 груш, 30 бананов, 40 персиков и 50 мандаринов?

Задача 1.3. На экскурсию в Санкт-Петербург едут 30 школьников вместе с родителями, часть из которых ведут автомобили. В каждый из автомобилей помещается 5 человек, включая водителя. Какое наименьшее количество родителей необходимо пригласить на экскурсию?

Задача 1.4. Каким наименьшим числом монет в 3 и 5 копеек можно набрать сумму 37 копеек?

Задача 1.5. Варя купила набор клетчатых фигурок, которыми можно замостить любой многоугольник, изображенный на рисунке (для каждого многоугольника одной детали мало). Какое минимальное количество фигурок могло быть в таком наборе?



Задача 1.6. Есть чашечные весы без гирь и ящик с песком. Нужно насыпать песок в несколько мешков (по целому числу килограммов в каждый) так, чтобы, используя эти мешки вместо гирь, можно было измерить любую целочисленную массу от 1 кг до 13 кг. Каким наименьшим числом мешков можно обойтись, если:

а) мешки можно ставить только на одну чашу, не занятую взвешиваемым товаром;

б) мешки можно ставить на обе чаши?

Задача 1.7. У хозяйки есть 5 одинаковых пирожков, которыми она хочет угостить 6 гостей. Хозяйка умеет отрезать от пирожка любую часть. Какое наименьшее число разрезов потребуется, чтобы можно было разделить все угощение поровну между всеми пришедшими гостями?

Задача 1.8. У продавца имеется 10 гирь весом 1, 2, 3, …10 кг. Известно, что все покупатели, стоящие в очереди к продавцу, купили разное целое число килограммов товара. Какое максимальное число покупателей могло стоять в очереди?

Задача 1.9. Найдите наименьшее составное число, которое не делится ни на одно из натуральных чисел от 2 до 8.

Задача 1.10. Десять пятиклассников играли в настольный теннис. Проигравший обижался и уходил. Каким может быть наибольшее число игроков, выигравших хотя бы по две партии?

Оглавление