Н.Н. Хлевнюк

Теоретические конспекты по математике

10–11 классы

Книга для учителя
Часть 1

2-е издание, исправленное

МОСКВА
ИЛЕКСА
2024

УДК 37.026.4:512
ББК 74.202.6+22.14
Х55

Хлевнюк Н.Н.
Х55 Теоретические конспекты по математике. 10–11 классы. Книга для учителя. Часть 1. — 2-е изд., исправ. — М.: ИЛЕКСА, 2024. — 96 с.: ил.
ISBN 978-5-89237-734-8

В книге представлены в форме конспектов теоретические материалы по темам курса профильной математики 10–11. Каждый конспект сопровождается методическими материалами, включающими понятийный аппарат, рекомендации по использованию, ответы на ключевые вопросы темы, практические задания и решения сложных задач. Конспекты созданы на основе многолетней практики преподавания математики в старшей школе. Основная цель конспектов — получение системных знаний, формирование логического мышления, снятие затруднений в усвоении сложных вопросов, выравнивание уровней обученности учеников, подтягивание отстающих. Это дает возможность подготовить в будущем современного инженера и исследователя. В целом конспекты учат учиться.

Комплект из трех книг для ученика и учителя поможет в организации занятий любого формата: уроков, внеклассных и индивидуальных занятий, элективных курсов, в повторении теории и практики, в подготовке к контрольным испытаниям.

Книга адресована учителям, методистам, студентам педагогических вузов, репетиторам, родителям и ученикам.

УДК 37.026.4:512
ББК 74.202.6+22.14

ISBN 978-5-89237-734-8

Предисловие

Авторские теоретические конспекты (ТК) по математике для старшей профильной школы (книги для учителя) представлены в 2-х частях.

Тематика 1-й части:

- множества,
- выражения,
- функции и графики,
- уравнения и неравенства,
- основы тригонометрии,
- задачи с параметрами.

Тематика 2-й части:

- производная и её применение,
- первообразная и интеграл,
- равносильность уравнений и неравенств,
- рационализация неравенств,
- метод математической индукции,
- основы комбинаторики,
- теория вероятностей.

Теоретические конспекты для ученика представлены в третьей книге с той же тематикой.

Книга для ученика — обучающее издание. В теоретических конспектах для ученика есть пропуски в определениях, алгоритмах, решениях и выводах. Именно их заполнение будет способствовать развитию мыслительной деятельности. Ученик самостоятельно открывает новое знание: формулирует определения и алгоритмы, приводит примеры, подкрепляющие теорию, приходит к выводам. В теоретических конспектах для учителя все эти пропуски заполнены.

Появлению теоретических конспектов предшествовала многолетняя педагогическая практика. Теоретические конспекты созданы на основе принципов системности и преемственности. Так обеспечивается общий подход к обработке любой математической информации. Каждый ТК представлен на одном развороте, что дает целостное восприятие темы. Материал отличается полнотой содержания и краткостью формы, единицы знаний взаимосвязаны, взаимодополняемы. Многочисленные примеры и контрпримеры подкрепляют теоретические положения; решения задач подтверждают справедливость алгоритмов. Важна роль ТК в систематизации и обобщении знаний.

Цель ТК — дать ученикам единицы знаний так, чтобы они встраивались в общую систему. Это позволяет исключить или сократить фрагментарность усвоения темы. Обучение с помощью ТК способствует формированию у учеников умений самим добывать знания, классифицировать по конкретным основаниям и структурировать их. ТК учат разрешать важные учебные вопросы: как формулировать определения и работать с теорией, как анализировать задачу и соотносить конкретный математический объект (уравнение, неравенство и т.д.) с каноническим видом, как выстроить алгоритм решения и реализовать его и т.д. Так ученик «учится учиться».

Такая система предполагает особую организацию умственной работы, создает базу для формирования универсальных учебных действий. Применение ТК направлено на формирование умений собирать факты — в уроки, уроки — в темы, темы — в разделы, разделы — в системные предметные знания: они позволят выйти за круг одного предмета, помогут в усвоении смежных дисциплин. В этом случае можно говорить о культуре мышления и математической грамотности, о возможности вырастить современных инженеров и исследователей.

Использование ТК показало, что их применение оптимизирует процесс усвоения знаний.

ТК органично встраивается в учебный процесс вне зависимости от выбора учебника. Их можно применять фрагментарно (в любом объёме) или полностью.

Алгебра 10–11 ТК № 1. **Выражения. Функции, уравнения, неравенства. Систематизация курса алгебры 7–9**

Понятия, определения, правила:

- *Типы выражений, функций, уравнений и неравенств.*
- *Область допустимых значений выражения и область определения функции.*
- *Общий (канонический) вид уравнения, неравенства, функции данного типа.*

Тип	I. Выражение	II. Функция
1. Линейные	1. $ax + b$ — многочлен I-й степени, *двучлен*. 2. Пример: $7x - 2$. 4. Область допустимых значений ОДЗ: R.	1. $y = ax + b$ — *линейная*. 2. Пример: $y = 7x - 2$. 3. Алгоритм: Построение по двум точкам. График: *прямая*. 4. Область определения $D(y) = R$. Область значений $E(y) = R$.
2. Квадратные	1. $ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$ — многочлен II-й степени, *квадратный трёхчлен*. 2. Пример: $2x^2 + x - 3$. 3. Разложение на множители: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, где x_1, x_2 — корни квадратного трехчлена. 4. ОДЗ: R.	1. $y = ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$ — *квадратичная*. 2. Пример: $y = 2x^2 + x - 3$. 3. Алгоритм построения: 5 точек: 1-я точка — вершина $(x_0;\ y_0)$: $x_0 = -\frac{b}{2a}$; $y_0 = y(x_0)$. График: *парабола*. 4. $D(y)$: R.
3. Целые рациональные, высших степеней	1. $ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \ldots$ — многочлен n-й степени. $ax^3 + bx^2 + cx + d$ — многочлен III-й степени. 2. Пример: $-x^3 + 2x^2 + 3x - 7$. 4. ОДЗ: R.	1. $y = ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \ldots$ — целая функция n-й степени. $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$. 2. Пример: $y = -x^3 + 2x^2 + 3x - 7$. 3. Изучение свойств функций и построение графиков в 10–11-м классах. 4. $D(y)$: R.
4. Дробные рациональные	1. $\frac{ax^n + bx^{n-1} + \ldots}{cx^m + dx^{m-1} + \ldots}$ или $\frac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x)$, $Q(x)$ — *многочлены*. 2. Пример: $\frac{3x^2 - 2x - 1}{-x + 3}$. 4. ОДЗ: *все значения* x, *где* $Q \neq 0$.	1. $y = \frac{ax^n + bx^{n-1} + \ldots}{cx^m + dx^{m-1} + \ldots}$ или $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$. Частный случай $y = \frac{k}{x}$ — *обратная пропорциональность*. 2. Пример: $y = \frac{8}{x}$. График: *гипербола*. 3. Построение по точкам (не менее 6 точек). 4. $D(y) = (-\infty;\ 0) \cup (0; +\infty)$, $E(y) = (-\infty;\ 0) \cup (0; +\infty)$
5. Иррациональные	1. $\sqrt[n]{f(x)}$, где $f(x)$ — рациональное выражение, $n = 2k$ — чётное, $n = 2k + 1$ — нечётное. 2. Пример: $\sqrt{2x^2 - 7}$. 4. ОДЗ для $n = 2k$: $f(x) \geq 0$. Для примера ОДЗ: $2x^2 - 7 \geq 0$.	1. $y = \sqrt[n]{f(x)}$. Частный случай: $y = \sqrt{x}$. 2. Пример: 3. Построение по таблице значений из 4–5 точек. 4. $D(y) = [0;\ +\infty)$, $E(y) = [0;\ +\infty)$.

Вопросы для контроля

1. Почему в математике вводят понятие «основной, или канонический вид»?

2. По каким внешним признакам выражения мы относим его к тому или иному типу?

3. Почему необходимо соотнести данное выражение (уравнение, неравенство, функцию) с соответствующим типом, прежде чем приступать к его решению?

III. Уравнение	**IV. Неравенство**	**Тип**
1. $ax+b=0$ *I-й степени, линейное.* 2. Пример: $7x-2=0$. 3. Алгоритм: выразить x, используя свойства равенств (**какие? устно**).	1. $ax+b>0$ $(<,\ \le,\ \ge)$ *I-й степени, линейное.* 2. Пример: $7x-2\le 0$ (решить устно). 3. Алгоритм: выразить x, используя свойства неравенств (**какие? устно**).	**1. Линейные**
1. $ax^2+bx+c=0$, где $a\ne 0$. 2. Пример: $2x^2+x-3=0$. 3. Формула корней квадратного уравнения: $D=b^2-4ac;\ x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$. Для рационального решения используем классификацию квадратных уравнений: полные, неполные, приведённые и т.д.	1. $ax^2+bx+c>0$ $(<,\ \le,\ \ge)$, где $a\ne 0$. 2. Пример: $2x^2+x-3\le 0$. 3. *1 способ* — с использованием графика квадратичной функции; *2 способ* — разложение на множители и применение метода интервалов: $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$.	**2. Квадратные**
1. $ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\ldots=0$, $ax^3+bx^2+cx+d=0$. 2. Пример: $-x^3+2x^2+3x=0$. 3. Решаем только частные виды уравнений методом разложения на множители и пользуясь правилом «произведение множителей равно 0».	1. $ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\ldots>0$, $ax^3+bx^2+cx+d>0$. 2. Пример: $x^3-3x^2+2x>0$. 3. Решаем методом интервалов в случае, если разложим на множители. Пример: $x(x-1)(x-2)>0$.	**3. Целые рациональные, высших степеней**
1. $\dfrac{ax^n+bx^{n-1}+\ldots}{cx^m+dx^{m-1}+\ldots}=0$ или $\dfrac{P(x)}{Q(x)}=0$. 2. Пример: $\dfrac{3x^2-2x-1}{-x+3}=0$. 3. Дробь равна 0, если числитель равен 0, а знаменатель не равен 0, т.е. $\dfrac{P(x)}{Q(x)}=0\Leftrightarrow\begin{cases}P(x)=0,\\Q(x)\ne 0.\end{cases}$ 4. **Внимание!** — ОДЗ: $Q(x)\ne 0$.	1. $\dfrac{ax^n+bx^{n-1}+\ldots}{cx^m+dx^{m-1}+\ldots}>0$ или $\dfrac{P(x)}{Q(x)}>0$ $(<;\ \ge;\ \le)$. 2. Пример: $\dfrac{3x^2-2x-1}{-x+3}\ge 0$. 3. Решаем методом интервалов. (Применение обобщённого метода интервалов см. в ТК № 16.)	**4. Дробные рациональные**
1. $\sqrt[n]{f(x)}=g(x)$, где $f(x),\ g(x)$ — рациональные или трансцендентные выражения. 2. Пример: $\sqrt{x+2}=x$. 3. *1 способ:* применяют соответствующий алгоритм $\sqrt{f(x)}=g(x)\ \Leftrightarrow\begin{cases}g(x)\ge 0,\\f(x)=g^2(x).\end{cases}$ *2 способ:* возводим в квадрат и делаем проверку!	1. $\sqrt[n]{f(x)}>g(x)$ $(<,\ \le,\ \ge)$, где $f(x),\ g(x)$ — рациональные или трансцендентные выражения. 2. Пример: $\sqrt{x+2}\le x$. 3. Для решения применяют алгоритм, но надёжнее решать универсальным методом интервалов.	**5. Иррациональные**

ТК № 1. **Выражения. Функции, уравнения, неравенства**

Систематизация курса алгебры 7–9

Содержание

Систематизация по всем типам[1] выражений, функциям, уравнениям и неравенствам, изученным в 7–9-х классах. Этот материал является фундаментом для усвоения математических знаний в старшей школе, востребован на всем продолжении обучения, и этот материал постепенно будет дополняться трансцендентными типами выражений, функций, уравнений и неравенств.

Использование

- При усвоении математических символов и знаков для обозначения выражений, функций, алгоритмов и т.д.
- При повторении (систематизации) основных фактов курса математики основной школы и осознании их взаимосвязи.
- При ликвидации пробелов в ходе решения практических заданий и дальнейшего изучения математики с акцентом на общий (канонический) вид выражения, функции, уравнения и неравенства.

Сопровождение

1. Работаем с ТК № 1 фронтально по строкам. Акцентируем внимание на понятиях «тип» выражения, а вместе с ним — «тип» функции, уравнения и неравенства. Напоминаем, что *основной объект алгебры — выражение*, которое при необходимости легко трансформируется в соответствующую функцию, уравнение или неравенство. От выражений переходим к функциям, уравнениям и неравенствам того же типа. Фиксируем, что все они называются одинаково, например: квадратный трёхчлен, квадратное уравнение, квадратное неравенство и квадратичная функция. Проговариваем «многоэтажные» определения, обращаем внимание на общий (канонический) вид, например,

$$\frac{\dfrac{\text{функция}}{\text{уравнение}}}{\text{неравенство}} \text{ вида } \frac{\dfrac{y = kx + b}{kx + b = 0}}{kx + b > 0\ (<, \le, \ge)}, \text{ где } k,\ b \text{ — числа, называется линейной (ым).}$$

2. Ячейка таблицы имеет одинаковую структуру с цифрами 1, 2, 3, 4.

Цифра 1. ***Определение выражения, функции, уравнения, неравенства*** каждого типа. Определяем структуру каждого понятия: **«Линейной функцией (линейным уравнением, неравенством) называется функция вида…», далее приводится её канонический (общий) вид.** В каждом каноническом виде есть буквы — параметры, и мы должны наложить на них ограничения. Если их нет, то по умолчанию считаем, что параметр может быть любым, — такая договорённость в математике. Всё это объясняем ученикам, чтобы они учились сами формулировать математические определения.

Заполняем все цифры 1.

Цифра 2. ***Приводим пример.*** Учащиеся работают самостоятельно или с частичной помощью учителя. Важно, чтобы ученики понимали связь между общим видом и частным случаем — примером.

Заполняем все цифры 2.

Цифра 3. ***Способ действия, метод решения, формулы,*** — либо отсутствует, либо обозначен в ТК, либо учащиеся дополняют информацию: самостоятельно или с помощью учителя. Рассуждаем вместе, восполняем пробелы.

Заполняем все цифры 3.

Цифра 4. ***ОДЗ и область определения функции*** — самые важные характеристики выражения и функции. Их взаимосвязь обозначаем для учеников при каждом удобном случае, разъясняем, что по сути — это одно и то же понятие, что находим их для каждого типа по единому алгоритму.

Заполняем все цифры 4.

3. Обозначаем материал, с которым познакомились в курсе алгебры 7–9, выделяем темы, усвоенные достаточно хорошо (обводим их); темы, где есть пробелы, выделяем другим способом. Темы, о которых было лишь упоминание до прихода в 10-й класс — обозначаем на перспективу, пока это — «белые пятна». **Таким образом, ТК № 1 помогает организовать работу по преемственности и пропедевтике знаний.**

---

[1] Здесь и далее. Под *типом* выражения понимаются разновидности выражений (а вместе с ними и уравнений, неравенств, функций), изучаемых в курсе математики 7–11кл. В пособии выделены целые выражения: линейные, квадратные, высших степеней; дробные рациональные выражения; иррациональные и степенные; трансцендентные: показательные, логарифмические и тригонометрические выражения. *Виды* выражений (уравнений, неравенств, функций) — разновидности в рамках одного типа. Например, *тип:* квадратные уравнения; *вид:* полное, неполное, приведённое.

4. Параллельно ведется практика. После выявления очередного пробела составляем несложное задание «решить уравнение, неравенство» и т.д., опираясь на общий вид. Задания преимущественно составляют сами ученики. Такая форма работы полезна и приятна ученикам, мотивирует и придаёт им уверенность. После решения ещё раз сверяем практику с теорией, составляем аналогичное задание (сложнее или по уровням) для домашней работы. Так движемся по ячейкам таблицы.

5. Отвечаем на вопросы для контроля.

Ответы на вопросы

1. Почему в математике вводят понятие «основной, или канонический вид»?

Каждый объект математики (выражение, уравнение, неравенство или функция) подчиняется определённым законам, правилам действий с ним. Например, складывать дроби нельзя как целые числа, а решать квадратное уравнение нельзя как линейное уравнение и т.д. Чтобы понимать, какие правила и законы применять к конкретному виду математического объекта, его сверяют с так называемым основным (каноническим) видом. Для этого и введено это понятие.

2. По каким внешним признакам выражения мы относим его к тому или иному типу?

При работе с выражениями обращаем внимание на переменную: какую максимальную степень она имеет, где находится — в числителе или в знаменателе и т.д. В зависимости от этого мы относим выражение к конкретному типу (целому, дробному рациональному, иррациональному, ...).

3. Почему необходимо соотнести данное выражение (уравнение, неравенство, функцию) с соответствующим типом, прежде чем приступать к его решению?

Чтобы верно решать задачи, а именно, точно знать, какие правила применять для преобразования конкретного выражения.

Задания

1. Разложите на множители.

а) x^2-7x; б) x^2-7x+6; в) $3x^2-5x+2$; г) $3x^2-5x+1$; д) x^2+x+1.

2. Разложите на множители.

а) x^3-x^2-6x; б) x^3-5x^2+7x; в) x^4-5x^2+4; г) x^4-5x^2+6; д) x^4-5x^2-6.

3. Постройте графики функций.

а) $y=-2$; б) $y=x$; в) $y=x-2$; г) $y=-2x$; д) $y=|x|$; е) $y=|x-2|$; ж) $y=|x|-2$.

4. Постройте графики функций.

а) $y=-x^2$; б) $y=(x-2)^2$; в) $y=x^2-2$; г) $y=x^2-2x$; д) $y=-x^2-2x+1$.

5. Постройте графики функций.

а) $y=\frac{6}{x}$; б) $y=\frac{6}{x+1}$; в) $y=\frac{6}{x}+1$; г) $y=\sqrt{x+3}$; д) $y=3-\sqrt{x}$.

6. Решите уравнения.

а) $x^3-2x^2-8x=0$; б) $x^4-10x^2+9=0$; в) $\frac{x^2-3x}{3x+7}=0$; г) $\frac{x^2-3x}{3x+7}=1$.

7. Решите неравенства.

а) $x^2-7x>0$; б) $x^2-7x+6\le 0$; в) $-2x^2-5x-2<0$; г) $x^2+x+1\ge 0$.

8. Решите неравенства.

а) $x^3-x^2-2x\ge 0$; б) $x^3-5x^2+7x<0$; в) $-5x^2+4>0$; г) $x^4-5x^2+6\le 0$.

Ответы

6. а) -2; 0; 4; б) -3; -1; 1; 3; в) 0; 3; г) -1; 7.

7. а) $(-\infty;\ 0)\cup(7;+\infty)$; б) $[1;\ 6]$; в) $(-\infty;\ -2)\cup(-0{,}5;+\infty)$; г) $(-\infty;\ +\infty)$.

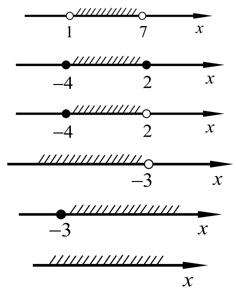
8. а) $[-1;\ 0]\cup[2;\ +\infty)$; б) $(-\infty;\ 0)$; в) $\left(-\frac{2}{\sqrt{5}};\ \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$; г) $[-\sqrt{3};\ -\sqrt{2}]\cup[\sqrt{2};\ \sqrt{3}]$.

Алгебра 10–11 ТК № 2. **Множества. Действительные числа. Числовые промежутки**

Понятия, определения, правила:

- *Множество элементов, числовое множество, числовой промежуток.*
- *Пересечение множеств и пересечение числовых промежутков.*
- *Объединение множеств и объединение числовых промежутков.*
- *Множества натуральных, целых, рациональных, иррациональных, действительных (вещественных) чисел; определения и обозначения.*

	I. Понятие множества, словарь теории множеств	**Примеры множеств**
Множества	**1. Множество** — одно из элементарных математических понятий, строгого определения не имеет. A, B, C, D — множества. **2. Язык множеств:** • элемент множества $a \in A$, $x \in D$, • подмножество $A \subset C$, • пересекающиеся множества, • непересекающиеся множества, • имеют (не имеют) общие элементы, • элемент принадлежит (не принадлежит) множеству, • конечные и бесконечные множества, • вложенные множества, • пустое множество $\varnothing$.	**A** — множество всех юношей 10-го класса нашей школы. **B** — множество всех девушек 10-го класса нашей школы. **C** — множество всех юношей нашей школы. **D** — множество всех учащихся 10-го класса нашей школы. **E** — множество всех городов Европы. **S** — множество всех городов России. **T** — множество всех городов Италии. **Q** — множество всех жителей Италии. **P** — множество всех городов европейской части России.

	II. Изображения промежутков		**Название промежутков, запись промежутков**
Числовые промежутки — множества точек		а) (1; 7); б) [–4; 2]; в) [–4; 2); г) $(-\infty; -3)$; д) $[-3; +\infty)$; е) $(-\infty; +\infty)$.	1. Отрезок: [–4; 2]. 2. Интервал: (1; 7). 3. Полуинтервал: [–4; 2). 4. Луч и открытый луч: $[-3; +\infty)$; $(-\infty; -3)$. ***Впишите промежутки в соответствующий пункт.***

III. Основные операции над множествами и примеры	
1. Объединение множеств $C = A \cup B$ — множество элементов C, каждый из которых принадлежит хотя бы одному из множеств A или B.	$A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$, $B = \{2; 4; 6; 8; 10\}$, $C = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 10\}$.
2. Пересечение множеств $P = A \cap B$ — множество элементов P, каждый из которых принадлежит одновременно обоим множествам A и B.	$A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$, $B = \{2; 4; 6; 8; 10\}$, $P = \{2; 4; 6\}$.
3. Разность множеств $T = A \setminus B$ — множество элементов T, каждый из которых принадлежит множеству A и не принадлежит множеству B.	$A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$, $B = \{2; 4; 6; 8; 10\}$, $T = \{1; 3; 5; 7\}$.

Вопросы для контроля

1. Отличаются ли пересечение и объединение одних и тех же числовых промежутков?

2. Могут ли совпадать пересечение и объединение двух промежутков? Если нет, то почему? Если да, то приведите пример.

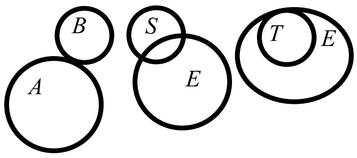
3. Приведите пример каких-нибудь трёх числовых множеств, чтобы каждое последующее содержалось в предыдущем.

4. Какие из множеств чисел: натуральные, целые, рациональные, иррациональные в пересечении дают пустое множество?

5. Какие из перечисленных в вопросе 4 множеств в объединении дают множество действительных чисел?

IV. Операции над множествами, изображение множеств

1. **Изображение множеств в виде кругов Эйлера**



Важно! верно изображать множества с учётом их взаимосвязей.

2. **Операции над множествами**

Объединение множеств: $A \cup B = D$.

Пересечение множеств: $E \cap S = P$;
$A \cap B = \varnothing$; $E \cup T = E$; $E \cap T = T$.

Обозначьте множества на кругах Эйлера и выполните операции над множествами

VI. Примеры пересечения и объединения промежутков

1. $[-4;\ 2) \cap (1;\ 7) = (1; 2)$.

2. $[-4;\ 2) \cap [3;\ \infty) = \varnothing$.

Пересечение промежутков находят при решении систем неравенств.

$\begin{cases} x \geq 1, \\ x < 4; \end{cases} \Leftrightarrow\ x \in [1;\ 4).\ \begin{cases} x \leq 4, \\ x < 1; \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-\infty; 1).$

Запишите результаты действий

3. $[-4;\ 2) \cup (1;\ 7) = [-4;\ 7)$.

4. $[-4;\ 2) \cup [3;\ \infty) = [-4;\ 2) \cup [3;\ \infty)$.

5. $(-\infty;\ 3) \cup [3;\ \infty) = R$

Объединение промежутков находят при решении совокупностей неравенств.

$\left[\begin{array}{l} x \geq 1, \\ x < 4; \end{array}\right. \Leftrightarrow\ x \in R.\left[\begin{array}{l} x \leq 1, \\ x > 4; \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in (-\infty; 1] \cup (4; +\infty).$

Запишите результаты действий

V. Множество действительных чисел

Примеры действительных чисел:

$7;\ -2;\ 4{,}1515\ldots;\ 4{,}151617\ldots;\ \frac{2}{3};\ \frac{2}{5};\ \sqrt{7};\ \pi;\ e.$

N — множество всех натуральных чисел $1;\ 2;\ 3;\ \ldots$

Z — множество всех целых чисел
$\ldots;\ -3;\ -2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ \ldots$.

Q — множество всех рациональных чисел.

Числа вида $\frac{m}{n}$, где $m \in Z$, $n \in N$.

$\frac{2}{3};\ -\frac{2}{5};\ \frac{12}{4};\ 6\frac{7}{19};\ \ldots$ — могут быть представлены в виде десятичных периодических дробей (конечных или бесконечных)

$-\frac{2}{5} = -2 : 5 = -0{,}4;\ \frac{3}{11} = 3 : 11 = 0{,}2727\ldots = 0{,}(27).$

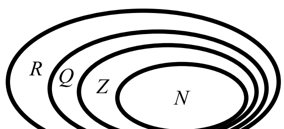
I — множество всех иррациональных чисел — числа представлены в виде бесконечных десятичных непериодических дробей

а) $4{,}151617\ldots;\ 0{,}010110111\ldots$;

б) $\sqrt{7}$, $\sqrt{13}$, π, e ,... — десятичные приближения этих чисел — есть непериодические дроби.

R — множество всех действительных чисел.

R = Q ∪ I.



На множестве R выполняются законы:

- свойства порядка,
- свойства сложения и вычитания,
- свойства умножения и деления,
- Архимедово свойство.

Подпишите круги Эйлера

ТК № 2. **Множества. Действительные числа. Числовые промежутки**

Содержание

Основные понятия теории множеств, графическая интерпретация множеств и их отношений.

Операции над множествами и действия с числовыми промежутками на языке множеств.

Примеры пересечения и объединения числовых промежутков как результат решения системы и совокупности.

Определение всех типов чисел, классификация, примеры, отношения между типами: вложенность, пересечение, объединение.

Использование

- Для совершенствования математического языка и обозначений.
- Для усвоения понятия «множество» и операций над множествами.
- Для интерпретации числового промежутка как множества с бесконечным количеством элементов — действительных чисел.
- Для графического представления в виде кругов Эйлера взаимосвязи всех типов чисел: натуральных, целых, рациональных, иррациональных и действительных чисел.

Сопровождение

Часто приходится возвращаться к содержанию конспекта, чтобы уточнить символы для обозначения, повторить определения чисел разных типов. Чаще всего забывают определения рациональных и иррациональных чисел. Важной является информация о множествах, отношениях между множествами и их графической интерпретацией. Изображение множеств с помощью кругов Эйлера помогает решать логические и вероятностные задачи.

Дополнительные сведения о множествах

1) Декартово (прямое) произведение множеств $\Phi = A \times B$ — множество всех упорядоченных пар множеств A и B. Примеры: а) $R \times R = R^2$ — множество всех точек декартовой плоскости; б) если $A = [1;\ 3]$, $B = [0;\ 4]$, то Ф — множество всех точек прямоугольника с вершинами: (1; 0), (1; 4), (3; 0), (3; 4) в системе координат Oxy.

2) Дополнение множества B до множества A, если множество B является подмножеством множества A — частный случай разности $T = A \setminus B$. Обозначают: $\overline{B} = A \setminus B$.

3) Мощность множества: а) мощность конечного множества — число элементов этого множества; б) в случае бесконечного числа элементов два множества могут быть равномощными, если между их элементами можно установить взаимно однозначное соответствие по любому правилу. Например, корни тригонометрического уравнения и множество целых чисел.

4) Множества делятся на конечные множества (имеют конечное число элементов); бесконечные счётные множества (элементы можно занумеровать), они равномощны множеству натуральных чисел; бесконечные несчётные множества, они не равномощны множеству натуральных чисел, например множество действительных чисел.

Вопросы для контроля

1. Отличаются ли пересечение и объединение одних и тех же числовых промежутков?

Да. Не отличаются только в том случае, если эти множества совпадают.

2. Могут ли совпадать пересечение и объединение двух промежутков? Если нет, то почему? Если да, то приведите пример.

Пересечение и объединение двух промежутков могут совпадать только в том случае, если эти промежутки совпадают. Например, (1; 4) З (1; 4) = (1; 4) и $(1;\ 4) \cup (1;\ 4) = (1;\ 4)$.

3. Приведите пример трёх числовых множеств, чтобы каждое следующее содержалось в предыдущем. Например, (–2; 5), (0; 4), (1; 2).

4. Какие из множеств чисел: натуральные, целые,… в пересечении дают пустое множество?

Любое из множеств чисел: натуральные, целые или рациональные в пересечении с множеством иррациональных чисел даёт пустое множество.

5. Какие из перечисленных множеств в объединении дают множество действительных чисел?

Множество действительных чисел даёт объединение рациональных и иррациональных чисел.

Задания

1. Опишите множество чисел, являющееся пересечением множеств $A \cap B$, если:

а) А — множество всех чётных чисел, В — множество всех чисел, кратных 3-м.

б) А — множество неотрицательных чисел, В — множество неположительных чисел.

в) А — множество всех чисел, делящихся на 5, В — множество всех чисел, делящихся на 15.

2. Опишите множество чисел, являющееся объединением множеств $A \cup B$, если:

а) A — множество всех чётных чисел, B — множество всех чисел, кратных 32-м.

б) A — множество неотрицательных чисел, B — множество неположительных чисел.

в) A — множество всех иррациональных чисел, B — множество всех рациональных чисел.

3. Выполните действия с числовыми множествами.

а) $(-\infty; 7] \cup (-4; +\infty)$; б) $(-2; 21] \cup (-\infty; 5)$; в) $(0; 7] \cup (-4; 2)$; г) $[-1; 3) \cup [3; +\infty)$.

4. Выполните действия с числовыми множествами.

а) $(-\infty; 7] \cap (-4; +\infty)$; б) $(-2; 21] \cap (-\infty; 5)$; в) $(0; 7] \cap (-4; 2)$; г) $[-1; 3) \cap [3; +\infty)$.

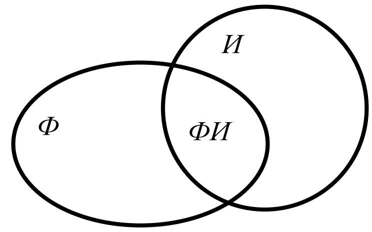
5. Найдите решения системы и совокупности.

а) $\begin{cases} x^3 - x = 0, \\ x^2 - 3x + 2 = 0 \end{cases}$ и $\left[\begin{array}{l} x^3 - x = 0, \\ x^2 - 3x + 2 = 0; \end{array}\right.$ б) $\begin{cases} x^4 - 4x^2 + 3 = 0, \\ \left|x^2 - 4\right| = 3 \end{cases}$ и $\left[\begin{array}{l} x^4 - 4x^2 + 3 = 0, \\ \left|x^2 - 4\right| = 3. \end{array}\right.$

6. Найдите решения системы и совокупности.

а) $\begin{cases} -x > 0, \\ -3x + 2 \le 0 \end{cases}$ и $\left[\begin{array}{l} -x > 0, \\ -3x + 2 \le 0; \end{array}\right.$ б) $\begin{cases} 2x + 13 \ge 0, \\ x^2 > 5 \end{cases}$ и $\left[\begin{array}{l} 2x + 13 \ge 0, \\ x^2 > 5. \end{array}\right.$

7. Решите задачу. В классе 25 человек, каждый из них посещает факультативы французского или испанского языка, а некоторые — посещают и тот, и другой факультативы. Французским языком занимается 17, а испанским — 15 учеников. Сколько из них посещают оба факультатива?



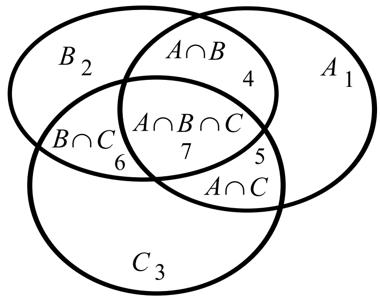
Решение. Решить задачу помогут круги Эйлера. Рассмотрим множества: *Ф* — все французы, *И* — все испанцы, $ФИ = Ф \cap И$ — занимаются и французским и испанским языком; $Ф \cup И$ — все ученики класса. По условию задачи: $|Ф \cup И| = 25$, $|Ф| = 17$, $|И| = 15$, где $|A|$ обозначает мощность множества *A*. По смыслу схемы запишем равенство:

$$|Ф \cup И| = |Ф| + |И| - |Ф \cap И|.$$

Отсюда $|ФИ| = |Ф \cap И| = 17 + 15 - 25 = 7.$

Ответ: 7 учеников учат оба языка.

8. Решите задачу. В классе 25 человек, каждый из них посещает хотя бы один спортивный кружок, некоторые посещают два кружка, а есть и такие, которые занимаются трёмя видами спорта. Известно, что 12 школьников играют в футбол, 14 — занимаются теннисом, а 13 — играют в шахматы. При этом известно, что 4 шахматистов играют в футбол, 5 шахматистов занимаются теннисом, а 7 теннисистов играют в футбол. Сколько школьников посещают три кружка? Сколько школьников посещают только один кружок?



Решение. Схема сложная. Формула, связывающая эти множества:

$$n(A \cup B \cup C) =$$
$$= n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C),$$

где *n* — число элементов множества. Формулу несложно доказать, используя пронумерованные «кусочки» от 1 до 7. Запишем равенство в числах: $25 = 12 + 14 + 13 - 4 - 5 - 7 + x.$

Тогда $x = n(A \cap B \cap C) = 2$. Из рисунка видно, что только футболом (пусть это будет множество A_1) занимаются: $n(A_1) = 12 - 7 - 4 + 2 = 3$. Аналогично находим: 4 занимаются только теннисом, 6 — только шахматами.

Ответы

1. а) числа, кратные 6; б) $\{0\}$; в) числа, кратные 15.

2. а) чётные числа; б) R; в) R.

3. а) R; б) $(-\infty; 21]$; в) $(-4; 7]$; г) $[-1; +\infty)$.

4. а) $(-4; 7]$; б) $(-2; 5)$; в) $(0; 2)$; г) $\{\varnothing\}$.

5. а) $\{1\}$ и $\{-1; 0; 1; 2\}$; б) $\{-1; 1\}$ и $\{-\sqrt{7};\ -\sqrt{3};\ -1;\ 1;\ \sqrt{3};\ \sqrt{7}\}$.

6. а) $\{\varnothing\}$ и $(-\infty;\ 0) \cup \left[\frac{2}{3}; +\infty\right)$; б) $[-6{,}5; -\sqrt{5}) \cup (\sqrt{5}; +\infty)$ и $(-\infty; +\infty)$.

Алгебра 10–11 ТК № 3. **Выражения. Модуль выражения**

Понятия:

- *Типы выражений, область допустимых значений и область значений выражения.*
- *Определение модуля числа, свойства модуля, геометрический смысл модуля.*
- *Правило раскрытия модуля на промежутках.*

I. Выражения и типы выражений

Выражения

- **Рациональные**
  - **Целые** — многочлены n-й степени $P_n(x)$
  - **Дробные** рациональные $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$
- **Иррациональные** $\sqrt[2n+1]{f(x)}$; $\sqrt[2n]{f(x)}$ **степенные** $\left(f(x)\right)^{\frac{m}{n}}$
- **Трансцендентные**
  - **Показательные** $a^{f(x)}$
  - **Логарифмические** $\log_a f(x)$
  - **Тригонометрические** $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$

Математическое выражение — запись с помощью математических знаков, цифр, букв, скобок.
Обозначения: $f(x)$, $a(t)$ — выражения, зависящие от переменных x, t.

II. ОДЗ, или область определения выражения $f(x)$, обозначают: $D(f)$. Множество (область) значений выражения $f(x)$, обозначают: $E(f)$.

1. ОДЗ выражения — множество всех значений переменной, для которых выражение имеет смысл.

Найти ОДЗ выражения — значит, отобрать такие числа, для которых выполнимы все операции, заданные в выражении.

2. Множество значений выражения — множество всех значений, которые может принимать данное выражение.

Важно!

Различать понятия $D(f)$ и $E(f)$.

Пример: Дано $f(x) = 4 + \sqrt[4]{7-x}$.

$D(f) = (-\infty; 7]$; $E(f) = [4; +\infty)$.

1. $P_n(x)$; $\dfrac{P(x)}{a}$ (a — число); ОДЗ: $x \in R$.
2. $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$. ОДЗ: все x, при которых $Q(x) \neq 0$.
3. $\sqrt[2n+1]{f(x)}$, где $n \in N$; ОДЗ: $x \in R$.
4. $\sqrt[2n]{f(x)}$, где $n \in N$; ОДЗ: $f(x) \geq 0$.
5. $\left(f(x)\right)^{\frac{m}{n}}$. ОДЗ: при $\dfrac{m}{n} > 0$, $f(x) \geq 0$; при $\dfrac{m}{n} < 0$, $f(x) > 0$.
6. $\left(f(x)\right)^0$. ОДЗ: все x, при которых $f(x) \neq 0$.
7. a^x, где $a > 0$, $a \neq 1$. ОДЗ: $x \in R$.
8. $\log_a x$, где $a > 0$, $a \neq 1$. ОДЗ: $x > 0$.
9. $\log_{a(x)} f(x)$. ОДЗ: $\begin{cases} a(x) > 0, \\ a(x) \neq 1, \\ f(x) > 0. \end{cases}$

Вопросы для контроля

1. Какие типы и виды выражений имеют смысл на всей числовой прямой?

2. Почему важно при решении уравнений и неравенств находить ОДЗ входящих в них выражений?

3. В чём заключается операция «раскрытие модуля»? Сформулируйте алгоритм раскрытия модуля выражения.

4. Приведите пример модуля выражения, при раскрытии которого выражение: а) не изменило бы своего вида; б) изменилось бы на противоположное для всех действительных значений переменной.

III. Модуль числа и модуль выражения

Модуль (числа, выражения) обозначается:
$|-4|, |a|, |f(x)|, |2x+7|$.

Определение модуля.

Модулем числа (выражения) называется само это число (выражение), если оно ≥ 0, или число (выражение), противоположное ему самому, если оно < 0.

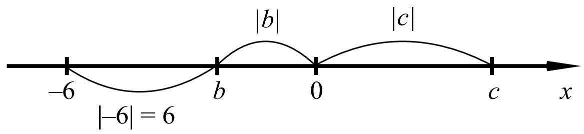
Определение: $|a| = \begin{cases} a, & если\, a \geq 0, \\ -a, & если\, a < 0. \end{cases}$

Примеры:
а) $|0| = 0$; б) $|-\pi| = -(-\pi) = \pi$;
в) $|x^2+1| = x^2+1$;
г) $|-x^2-2x-3| = -(-x^2-2x-3) = x^2+2x+3$.

Геометрический смысл модуля.

Понятие модуля числа $|a|$ введено:

1) Для обозначения расстояния от нуля до точки с координатой $\boldsymbol{a}$. На рис: $|b| = -b, |c| = c, |-6| = 6$.



2) Для обозначения длин векторов и векторных величин: $|\vec{m}|$; $|\overrightarrow{FD}|$.

Свойства модуля

1. $|a| \geq 0$; $|a| = |-a|$.
2. $|a^{2n}| = |a|^{2n} = a^{2n}$, $a \in \mathbf{R}$.
3. $|a| \cdot |b| = |ab|$, для $a, b \in \mathbf{R}$.
4. $\dfrac{|a|}{|b|} = \left|\dfrac{a}{b}\right|$, для $b \neq 0$.
5. $|a| + |b| \geq |a+b|$.
6. $|a| - |b| \leq |a-b|$.

Раскрытие модуля — операция, позволяющая убрать знак модуля, заменив его по определению модуля числом или выражением.

Для раскрытия модуля

1. Определяют промежутки, на каких выражение под знаком модуля ≥ 0 или < 0.
2. Раскрывают модуль по определению отдельно на каждом промежутке.

IV. Модуль выражения

Примеры задач. Упростить выражения, содержащие модуль

1. Упростить выражение $\sqrt{(b-2)^2} + |4-b|$ при $b \leq 2$.

Решение. $\sqrt{(b-2)^2} + |4-b| = |b-2| + |4-b|$.

При $b \leq 2$ имеем $b-2 \leq 0$, поэтому $|b-2| = -(b-2) = 2-b$.

При $b \leq 2$ получаем $4-b > 0$, поэтому $|4-b| = 4-b$. Следовательно, $|b-2| + |4-b| = 2-b+4-b = 6-2b$.

Ответ. $6-2b$.

2. Упростить выражение $|4-2b| + 3b + 4$.

Решение. 1) Если $b \geq 2$, то $4-2b \leq 0$, поэтому $|4-2b| = -(4-2b) = 2b-4$.

Тогда $|4-2b| + 3b + 4 = 2b-4+3b+4 = 5b$.

2) Если $b < 2$, то $4-2b > 0$, поэтому $|4-2b| = 4-2b$.

Тогда $|4-2b| + 3b + 4 = 4-2b+3b+4 = b+8$.

Ответ: $5b$ при $b \geq 2$; $b+8$ при $b < 2$.

ТК № 3. **Выражения. Модуль выражения**

Содержание

- Схема всех типов выражений и их обозначений, изучаемых в школе.
- Определения $D(f)$ и $E(f)$ и правила нахождения $D(f)$ для каждого типа выражения.
- Теория модуля числа и модуля выражения.
- Примеры раскрытия модуля выражения на указанном промежутке и на всей числовой прямой.

Использование

- При прохождении тем «ОДЗ выражения $f(x)$, или область определения функции $D(f)$».
- При знакомстве с уравнениями и неравенствами базового уровня, содержащими модули.
- При систематизации знаний о математическом выражении: его типа, общего вида, схем нахождения ОДЗ, принятых обозначений.
- По мере необходимости для повторения конкретных вопросов темы.

Сопровождение

1. Схему типов выражений (табл. I): фронтально обсуждаем и выделяем известные типы выражений. Приводим примеры (в рабочих тетрадях: тип, общий вид, пример), фиксируем пока неизвестные (трансцендентные) типы выражений, которые будем изучать позже.

2. Переходим на работу с ОДЗ (табл. II). Руководствуясь правилами 1–9, находим ОДЗ конкретных выражений, составленных учениками или предложенных учителем (письменно в тетрадях). Предлагаем на отметку составить и решить более сложные задания на нахождение ОДЗ. Напоминаем, что выражения бывают комбинированными (смешанных типов). При нахождении ОДЗ комбинированных выражений учитываем порядок действий.

3. Повторяем теорию модуля (табл. III) и правило раскрытия модуля выражения (табл. IV). Заполняем пропуски в конспекте, приводим свои примеры выражений с модулем в тетради. Тренируемся в раскрытии модуля. Полезно рассмотреть под знаком модуля выражения разных типов: квадратный трёхчлен, дробное рациональное выражение и т.д.

4. Если возникают затруднения при работе с модулями, можно использовать пояснение: модуль — специфическая математическая конструкция. Никакими действиями нельзя преобразовать выражение, пока есть модуль. Поэтому прежде чем решить уравнение, неравенство и т.д., нужно совершить математическую операцию — раскрыть модуль: это значит — убрать модуль по его определению. Основная сложность при раскрытии модуля в том, что при разных значениях переменной модуль может раскрываться по-разному. Поэтому приходится выделить те промежутки на числовой прямой, в которых модуль раскрывается одинаково. Применяем метод промежутков для раскрытия модулей. Решая уравнения (неравенства) с модулями ищем корни на каждом промежутке знакопостоянства подмодульных выражений. В ответ записываем совокупность найденных корней.

5. Отвечаем на вопросы для контроля.

Ответы на вопросы

1. Какие типы выражений имеют смысл на всей числовой прямой?

Все целые выражения: многочлены и корень нечётной степени из целого выражения имеют ОДЗ — любое действительное число. Например: $2x^2 - 7x + 8$; $\sqrt[5]{-x^3 + 2x - 11}$.

2. Почему важно при решении уравнений и неравенств находить ОДЗ входящих в них выражений?

Уравнение и неравенство составляют из выражений. Решая уравнение (неравенство), часто преобразовываем их так, что изменяется их тип. Дальнейшее решение может привести к посторонним корням. Например, при потенцировании логарифмического уравнения $\log_7(x^2 - 6) = \log 7x$ *получаем целое уравнение* $x^2 - 6 = x$, *его корни* $x = -2$; $x = 3$. *Но* -2 *не является корнем исходного уравнения, так как* $-2 \notin$ *ОДЗ:* $x > \sqrt{6}$. *Поэтому ОДЗ выражений, входящих в уравнение или неравенство, «защищает» от посторонних решений.*

3. В чём заключается операция «раскрытие модуля»? Сформулируйте алгоритм раскрытия модуля выражения.

Операция «раскрыть модуль» — означает «убрать знак модуля» по правилу. Алгоритм раскрытия модуля выглядит так: 1) каждое выражение под знаком модуля приравниваем к нулю и находим корни полученных уравнений. Наносим все корни на числовую прямую и разбиваем её на промежутки; 2) на каждом промежутке раскрываем модули в зависимости от знаков подмодульных выражений и упрощаем полученные выражения. В ответе последовательно указываем все промежутки с полученными на них выражениями.

4. Приведите пример модуля выражения, при раскрытии которого выражение: а) не изменило бы своего вида; б) изменилось бы на противоположное для всех действительных значений переменной.

а) $\left|x^2-6x+9\right|=x^2-6x+9$, *т.к. выражение* $x^2-6x+9\ge 0$ *при любом* $x\in R$.

б) $\left|-x^2+5x-7\right|=x^2-5x+7$, *т.к. выражение* $-x^2+5x-7<0$ *при любом* $x\in R$.

Задания

1. Найдите область допустимых значений выражений.
 а) $\sqrt{2x-6}\cdot\sqrt{7x+7}$; б) $\sqrt{(2x-6)(7x+7)}$; в) $\sqrt{4x+6}\cdot\sqrt{7-2x}$; г) $\sqrt{(4x+6)(7-2x)}$;
 д) $\sqrt{x^2-5x+4}$; е) $\sqrt{x^4-5x^2+4}$; ж) $\sqrt{x^3-5x^2+4x}$; з) $\sqrt[5]{x^3-5x+4}$.
2. Раскройте модули в выражениях.
 а) $|x-2|+|2x+3|$; б) $5|x-2|-|3-2x|$; в) $\left|x^2-2x-3\right|$; г) $\left|x^2-2x-3\right|-2|x-3|$.
3. Найдите множество значений выражения.
 а) $x-2$; б) x^2-2x-3; в) x^2-2x+3; г) x^3-2.
4. Найдите множество значений выражения.
 а) $\sqrt{x-2}$; б) $\sqrt{x}-2$; в) $\sqrt{x-2}-3$; г) $3-\sqrt{x-2}$; д) $\sqrt{x^2-2x+3}$.
5. Найдите множество значений выражения.
 а) $|x-2|$; б) $|x-2|-5$; в) $-|-2x-3|+5$; г) $2\cdot\left|x^2-2x+3\right|$.
6. Найдите область допустимых значений выражений.
 а) $\dfrac{2x-1}{\sqrt[4]{10x+2}}$; б) $\dfrac{\sqrt[4]{10x+2}}{2x-1}$; в) $\sqrt{\dfrac{2x-10}{10x+2}}$; г) $\dfrac{\sqrt{21-2x}}{\sqrt[4]{x^2-11x+10}}$; д) $\sqrt{(225-4x^2)\cdot\sqrt{x^2-1}}$.

Решения.

2(г). 1) $x^2-2x-3=0$; $x=3$; $x=-1$. $x-3=0$; $x=3$.

2) Если $x\in(-\infty;\ -1]$, то $\left|x^2-2x-3\right|=x^2-2x-3$; $|x-3|=-(x-3)$.

Тогда $\left|x^2-2x-3\right|-2|x-3|=x^2-2x-3+2x-6=x^2-9$.

Если $x\in(-1;3)$, то $\left|x^2-2x-3\right|=-(x^2-2x-3)$; $|x-3|=-(x-3)$.

Тогда $\left|x^2-2x-3\right|-2|x-3|=-x^2+2x+3+2x-6=-x^2+4x-3$.

Если $x\in[3;+\infty)$, то $\left|x^2-2x-3\right|=x^2-2x-3$; $|x-3|=x-3$.

Тогда $\left|x^2-2x-3\right|-2|x-3|=x^2-2x-3-2x+6=x^2-4x+3$.

6(д). ОДЗ выражения $\sqrt{(225-x^2)\cdot\sqrt{x^2-1}}$ совпадает с решениями системы $\begin{cases}x^2-1\ge 0,\\ 225-4x^2\ge 0.\end{cases}$

$$\begin{cases}x^2-1\ge 0,\\ 225-4x^2\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le -1;\ x\ge 1,\\ -7{,}5\le x\le 7{,}5\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&-7{,}5\le x\le -1,\\ &1\le x\le 7{,}5.\end{aligned}\right.$$ Ответ. $[-7{,}5;-1]\cup[1;7{,}5]$.

Ответы:

1. а) $[3;+\infty)$; б) $(-\infty;-1]\cup[3;+\infty)$; в) $[-1{,}5;3{,}5]$; г) $[-1{,}5;3{,}5]$; д) $(-\infty;1]\cup[4;+\infty)$;
 е) $(-\infty;-2]\cup[-1;1]\cup[2;+\infty)$; ж) $[0;\ 1]\cup[4;+\infty)$; з) $(-\infty;+\infty)$.

2. а) при $x\in(-\infty;-1{,}5]$: $-3x-1$; при $x\in(-1{,}5;2]$: $x+1$; при $x\in(2;+\infty)$: $3x+1$.
 б) при $x\in(-\infty;1{,}5]$: $-3x+7$; при $x\in(1{,}5;2]$: $-7x+13$; при $x\in(2;+\infty)$: $3x-7$.
 в) при $x\in(-\infty;-1]\cup(3;+\infty)$: x^2-2x-3; при $x\in(-1;3]$: $-x^2+2x+3$.

3. а) $(-\infty;+\infty)$; б) $[-4;+\infty)$; в) $[2;+\infty)$; г) $(-\infty;+\infty)$.

4. а) $[0;+\infty)$; б) $-[2;+\infty)$; в) $[-3;+\infty)$; г) $(-\infty;3]$; д) $[\sqrt{2};+\infty)$.

5. а) $[0;+\infty)$; б) $[-5;+\infty)$; в) $(-\infty;5]$; г) $[4;+\infty)$.

6. а) $(-0{,}2;+\infty)$; б) $[-0{,}2;0{,}5)\cup(0{,}5;+\infty)$; в) $(-\infty;-0{,}2)\cup[0{,}5;+\infty)$; г) $(-\infty;1)\cup(10;10{,}5]$.

Содержание

Предисловие . . . 3
Теоретические конспекты . . . 4
ТК № 1. Выражения. Функции, уравнения, неравенства. Систематизация курса алгебры 7–9 . . . 4
ТК № 2. Множества. Действительные числа. Числовые промежутки . . . 8
ТК № 3. Выражения. Модуль выражения . . . 12
ТК № 4. Числовые и буквенные равенства. Равносильность уравнений . . . 16
ТК № 5. Неравенства. Равносильность неравенств. Доказательство числовых неравенств . . . 20
ТК № 6. Рациональные уравнения. Методы решения . . . 24
ТК № 7. Функция и график. Свойства функции. Преобразование графика . . . 28
ТК № 8. Функции, содержащие модуль. Построение графиков функций . . . 32
ТК № 9. Иррациональные и степенные уравнения и неравенства . . . 36
ТК № 10. Понятие логарифма. Свойства логарифмов . . . 40
ТК № 11. Показательные и логарифмические уравнения и неравенства . . . 44
ТК № 12. Основы тригонометрии . . . 48
ТК № 13. Методы решения тригонометрических уравнений . . . 52
ТК № 14. Основные типы уравнений и методы решения . . . 56
ТК № 15. Классификация элементарных функций . . . 60
ТК № 16. Промежутки знакопостоянства функции. Метод интервалов для решения неравенств . . . 64
ТК № 17. Обратные действия. Обратная функция. Сложная функция. Множество значений сложной функции . . . 68
ТК № 18. Квадратный трехчлен в параметрах. Квадратное уравнение и квадратное неравенство . . . 72
ТК № 19. Квадратный трехчлен в параметрах. Задачи с условием. Уравнения и неравенства, сводящиеся к квадратным . . . 76
ТК № 20. Уравнения и неравенства с двумя переменными . . . 80
ТК № 21. Графический способ решения задач с параметрами в плоскости *Oxy* . . . 84
ТК № 22. Графический способ решения задач с параметрами. Параметр как равноправная переменная . . . 88