Н.Н. Хлевнюк

Теоретические конспекты по математике

10–11 классы

Книга для учителя
Часть 2

2-е издание, исправленное

МОСКВА
ИЛЕКСА
2024

УДК 37.026.4:512
ББК 74.202.6+22.14
Х55

Для детей старше двенадцати лет.
В соответствии с Федеральным законом
от 29 декабря 2010 г. № 436-ФЗ.

Учебное издание

Хлевнюк Н.Н.
Х55 Теоретические конспекты по математике. 10–11 классы. Книга для учителя. Часть 2. — 2-е изд., исправ. — М.: ИЛЕКСА, 2024. — 96 с.: ил.
ISBN 978-5-89237-735-5

В книге представлены в форме конспектов теоретические материалы по темам курса профильной математики 10–11. Каждый конспект сопровождается методическими материалами, включающими понятийный аппарат, рекомендации по использованию, ответы на ключевые вопросы темы, практические задания и решения сложных задач. Конспекты созданы на основе многолетней практики преподавания математики в старшей школе. Основная цель конспектов — получение системных знаний, формирование логического мышления, снятие затруднений в усвоении сложных вопросов, выравнивание уровней обученности учеников, подтягивание отстающих. Это дает возможность подготовить в будущем современного инженера и исследователя. В целом конспекты учат учиться.

Комплект из трех книг для ученика и учителя поможет в организации занятий любого формата: уроков, внеклассных и индивидуальных занятий, элективных курсов, в повторении теории и практики, в подготовке к контрольным испытаниям.

Книга адресована учителям, методистам, студентам педагогических вузов, репетиторам, родителям и ученикам.

УДК 37.026.4:512
ББК 74.202.6+22.14

Подписано в печать 29.11.2023. Формат 60×90/8.
Усл.-печ. л. 12,00. Тираж 1500 экз. Заказ № .
ООО «Илекса»
сайт: www.ilexa.ru, E-mail: real-ilexa@yandex.ru,
телефон: +7 (964) 534-80-01

ISBN 978-5-89237-735-5

Предисловие

Авторские теоретические конспекты (ТК) по математике для старшей профильной школы (книги для учителя) представлены в 2-х частях.

Тематика 1-й части:

- множества,
- выражения,
- функции и графики,
- уравнения и неравенства,
- основы тригонометрии,
- задачи с параметрами.

Тематика 2-й части:

- производная и её применение,
- первообразная и интеграл,
- равносильность уравнений и неравенств,
- рационализация неравенств,
- делимость,
- метод математической индукции,
- основы комбинаторики,
- теория вероятностей.

Теоретические конспекты для ученика представлены в третьей книге с той же тематикой.

Книга для ученика — обучающее издание. В теоретических конспектах для ученика есть пропуски в определениях, алгоритмах, решениях и выводах. Именно их заполнение будет способствовать развитию мыслительной деятельности. Ученик самостоятельно открывает новое знание: формулирует определения и алгоритмы, приводит примеры, подкрепляющие теорию, приходит к выводам. В теоретических конспектах для учителя все эти пропуски заполнены.

Появлению теоретических конспектов предшествовала многолетняя педагогическая практика. Теоретические конспекты созданы на основе принципов системности и преемственности. Так обеспечивается общий подход к обработке любой математической информации. Каждый ТК представлен на одном развороте, что дает целостное восприятие темы. Материал отличается полнотой содержания и краткостью формы, единицы знаний взаимосвязаны, взаимодополняемы. Многочисленные примеры и контрпримеры подкрепляют теоретические положения; решения задач подтверждают справедливость алгоритмов. Важна роль ТК в систематизации и обобщении знаний.

Цель ТК — дать ученикам единицы знаний так, чтобы они встраивались в общую систему. Это позволяет исключить или сократить фрагментарность усвоения темы. Обучение с помощью ТК способствует формированию у учеников умений самим добывать знания, классифицировать по конкретным основаниям и структурировать их. ТК учат разрешать важные учебные вопросы: как формулировать определения и работать с теорией, как анализировать задачу и соотносить конкретный математический объект (уравнение, неравенство и т.д.) с каноническим видом, как выстроить алгоритм решения и реализовать его и т.д. Так ученик «учится учиться».

Такая система предполагает особую организацию умственной работы, создает базу для формирования универсальных учебных действий. Применение ТК направлено на формирование умений собирать факты — в уроки, уроки — в темы, темы — в разделы, разделы — в системные предметные знания: они позволят выйти за круг одного предмета, помогут в усвоении смежных дисциплин. В этом случае можно говорить о культуре мышления и математической грамотности, о возможности вырастить современных инженеров и исследователей.

Использование ТК показало, что их применение оптимизирует процесс усвоения знаний.

ТК органично встраивается в учебный процесс вне зависимости от выбора учебника. Их можно применять фрагментарно (в любом объёме) или полностью.

Алгебра 10–11 ТК № 23. **Предел числовой последовательности. Предел функции. Непрерывность функции**

Понятия, определения, правила:

- *Предел числовой последовательности.*
- *Предел функции в точке и предел функции на бесконечности.*
- *Левосторонний и правосторонний пределы функции.*
- *Непрерывность функции в точке и на промежутке.*
- *Первый и второй замечательные пределы.*

I. Предел числовой последовательности	II. Предел функции
Рассмотрим числовые последовательности. а) $a_n = -3n$; б) $b_n = \frac{1}{2^n}$; в) $c_n = n^3$, где $n \in N$. Выпишем члены последовательностей: а) –3; – 6; – 9; …; –300 000; –300 003; … . б) $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{8}$; …; $\frac{1}{1024}$; $\frac{1}{2048}$; … . в) 1; 8; 27; 64; …; 1 000 000 000; … . Чем больше номер n, тем меньше a_n; тем больше c_n. А b_n приближается к нулю. В этом случае говорят, что при n, стремящемся к бесконечности ($n \to \infty$), a_n и c_n стремятся к бесконечности ($a_n \to -\infty$; $c_n \to +\infty$), а b_n стремится к нулю ($b_n \to 0$). На языке математики записывают в виде новой операции, называемой пределом: $\lim\limits_{n\to\infty}(-3n) = -\infty$; $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n} = 0$; $\lim\limits_{n\to\infty} n^3 = +\infty$.	Рассмотрим функции: а) $y = -3x$; б) $y = \frac{2x-1}{x}$. Найдём пределы функций при $x \to \pm\infty$: а) $\lim\limits_{x\to+\infty}(-3x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty}(-3x) = +\infty$. б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x-1}{x} = 2$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x-1}{x} = 2$. Пределы функций находят при стремлении аргумента к конкретному числу, например: а) $\lim\limits_{x\to2}\left(-3x\right) = -6$; б) $\lim\limits_{x\to0_{+0}}\frac{2x-1}{x} = -\infty$; в) $\lim\limits_{x\to0_{-0}}\frac{2x-1}{x} = +\infty$. В примерах б)–в) пределы не совпадают и равны $\pm\infty$. Тогда **говорят об одностороннем пределе.** $\lim\limits_{x\to a_{+0}} f(x)$ — **правосторонний предел** (x стремится к числу a справа, $x > a$). $\lim\limits_{x\to a_{-0}} f(x)$ — **левосторонний предел** (x стремится к числу a слева, $x < a$).

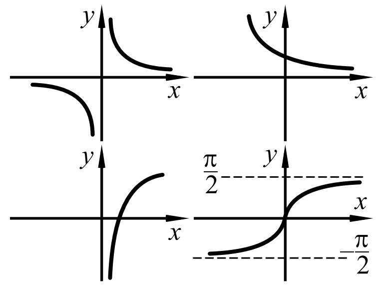
III. Определения	
Предел последовательности	**Число A называется пределом** числовой последовательности x_n: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер N_ε, что для всех $n > N_\varepsilon$ выполняется неравенство $\lvert x_n - A\rvert < \varepsilon$. То есть, начиная с достаточно большого номера N_ε, члены последовательности очень близки к пределу A и отличаются от A на очень малую величину ε. Пример: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n} = 0$
Предел функции на бесконечности	**Число A называется пределом** функции $f(x)$ на бесконечности ($x \to \pm\infty$): $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = A$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $M(\varepsilon)$, что для всех $x > M(\varepsilon)$ выполняется неравенство $\lvert f\left(x\right) - A\rvert < \varepsilon$. **Пример:** $y = \mathrm{arctg}x$; $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(\mathrm{arctg}\, x) = \pm\frac{\pi}{2}$. **Примечание.** Если $f(x)$ имеет предел при $x \to \pm\infty$, то график функции $f(x)$ имеет горизонтальную асимптоту $y = A$. График функции $y = \mathrm{arctg}\, x$ имеет асимптоты $y = \pm\frac{\pi}{2}$.
Предел функции в точке	**Число A называется пределом** функции $f(x)$ в точке x_0: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $\delta > 0$, такое, что для всех x, удовлетворяющих условию $\lvert x - x_0\rvert < \delta$ выполняется неравенство $\lvert f(x) - A\rvert < \varepsilon$. То есть, при аргументах x, сколь угодно близких к x_0, значения функции $f(x)$ отличаются от A на сколь угодно малую величину ε. Пример: $\lim\limits_{x\to2}(x^2 - 4x + 3) = -1$.

Вопросы для контроля

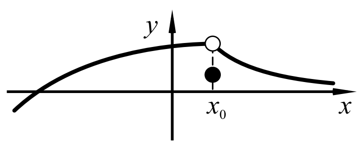
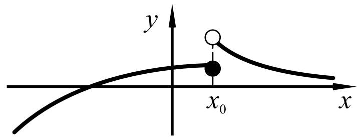
1. Какие из базовых функций (из ТК № 15) имеют конечные пределы на бесконечности? Имеют ли графики этих функций горизонтальные асимптоты $y = a$?

2. Укажите базовые функции (из ТК № 15), графики которых имеют вертикальные асимптоты $x = c$. Как это связано с пределом функции при $x \to c$?

3. Перечислите все элементарные функции школьного курса, претерпевающие разрыв.

IV. Примеры		
Базовые функции	**Иллюстрации**	**Примеры нахождения пределов**
1. $f(x)=\dfrac{1}{x}$, $D(f)=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$. 2. $y=\dfrac{1}{2^x}$, $D(f)=(-\infty;+\infty)$. 3. $y=\ln x$, $D(f)=(0;+\infty)$. 4. $y=\operatorname{arctg} x$, $D(f)=(-\infty;+\infty)$.		1. $\lim\limits_{\substack{x\to0,\\x>0}}\dfrac{1}{x}=+\infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to0,\\x<0}}\dfrac{1}{x}=-\infty$; $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{2}$. 2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{2^x}=0$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{2^x}=+\infty$. 3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to0,\\x>0}}\ln x=-\infty$. 4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\operatorname{arctg} x=\dfrac{\pi}{2}$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\operatorname{arctg} x=-\dfrac{\pi}{2}$.
При рассмотрении примеров обращайте внимание на графические образы функций		

V. Непрерывность функции	
Определение. Функция $y=f(x)$ называется непрерывной в точке x_0 из области определения ($x_0\in D(f)$), если значение функции в точке x_0 совпадает с пределом функции в этой точке. $\boxed{y=f(x) \text{ непрерывна в точке } x_0} \Leftrightarrow \boxed{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)}$	**Определение.** Функция $y=f(x)$ называется непрерывной на некотором промежутке, если она определена на этом промежутке и непрерывна в каждой точке этого промежутка. Все элементарные функции из школьного курса математики являются непрерывными на своей области определения.

VI. Примеры функций, претерпевающих разрыв		
Схемы графиков функций	**Противоречие с определением непрерывности функции**	**Словесное объяснение разрыва функции**
1. 	1. $\lim\limits_{x\to2} f(x)\ne f(2)$.	Значение функции в точке $x_0=2$ не равно пределу функции при $x\to2$.
2. 	2. $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}} f(x)\ne\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}} f(x)$	Пределы функции в точке $x_0=2$ (правосторонний и левосторонний) не равны.

VII. Замечательные пределы	
I-й замечательный предел: $$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1.$$ Предел, равный единице при $x\to0$, указывает на то, что вблизи нуля графики $y=x$ и $y=\sin x$ практически совпадают.	II-й замечательный предел: $$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e \text{ или } \lim_{x\to0+}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e.$$ $e\approx2{,}71828$ — основание натурального логарифма.

ТК № 23. Предел числовой последовательности. Предел функции. Непрерывность функции

Содержание

- Предел числовой последовательности.
- Предел функции на бесконечности и предел функции в точке.
- Непрерывность функции.
- Замечательные пределы.

Использование

- При изучении темы «Предел последовательности и предел функции».

Сопровождение

Тема «Пределы» предшествует изучению темы «Производная». Прохождение темы позволяет усвоить понятие непрерывности функции и производной функции. Предельный переход можно назвать особой математической операцией, в которой заложен философский смысл, действует закон диалектики «переход количества в качество». Достаточно привести несколько примеров предельного перехода, о которых полезно напоминать учащимся:

- Предел периметра правильного многоугольника, вписанного или описанного около окружности, при числе сторон, стремящемся к бесконечности, равен длине окружности.
- Предел тангенса угла, стремящегося к 90°, равен бесконечности.
- Предел боковой поверхности правильной призмы (правильной пирамиды) при неограниченном удвоении числа сторон основания равен цилиндрической (конической) поверхности.
- Трапеция при условии стремлении к нулю одного из оснований вырождается в треугольник, а предел длины средней линии трапеции при этом же условии равен длине средней линии треугольника.
- Теорема косинусов при условии стремления угла к 90° вырождается в теорему Пифагора.
- Сумма n первых членов геометрической прогрессии, если $|q|<1$, в пределе при числе ее членов, стремящихся к бесконечности, равна сумме бесконечно убывающей геометрической прогрессии и т.д.

Осознание операции предельного перехода способствует развитию математических способностей и формированию математической культуры, пониманию целостности и непротиворечивости математического знания.

При изучении данной темы в условиях ограниченного времени полезно не столько заниматься практикой по нахождению пределов, сколько рассуждать, объяснять на примерах самой разной природы, используя важнейшие математические формулы и теоремы; показывать на графиках базовых функций предельные переходы, акцентировать внимание на асимптотах этих графиков.

Вопросы для контроля

1. Какие из базовых функций (из ТК № 15) имеют конечные пределы на бесконечности. Имеют ли графики этих функций горизонтальные асимптоты $y = a$?

Степенная функция: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(x^p)=0$, *где p — целое отрицательное число, например,* $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(x^{-2})=0$, *а также* $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^p)=0$, *где p — дробное отрицательное число.*

Показательная функция: $\lim\limits_{x\to+\infty}(a^x)=0$, *где* $0<a<1$, *или* $\lim\limits_{x\to-\infty}(a^x)=0$, *где* $a>1$.

Обратные тригонометрические функции: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(\mathrm{arctg}x)=\pm\dfrac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}(\mathrm{arcctg}\,x)=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty}(\mathrm{arcctg}\,x)=\pi$.

Графики всех этих функций имеют горизонтальные асимптоты: $y=0$, $y=\pm\dfrac{\pi}{2}$, $y=\pi$.

2. Укажите базовые функции (из ТК № 15), графики которых имеют вертикальные асимптоты $x = c$. Как это связано с пределом функции при $x\to c$?

Степенная функция: графики всех перечисленных в вопросе 1 функций имеют вертикальную асимптоту $x = 0$. *Пределы этих функций при* $x\to 0$ *равны* $\pm\infty$.

Логарифмическая функция: $\lim\limits_{x\to 0}(\log_a x)=\pm\infty$ *в зависимости от a; график имеет асимптоту* $x = 0$.

Тригонометрические функции: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}+\pi n}(\mathrm{tg}\,x)=\pm\infty$, *график имеет асимптоты* $x=\dfrac{\pi}{2}+\pi n$; $\lim\limits_{x\to\pi n}(\mathrm{ctg}\,x)=\pm\infty$, *график имеет асимптоты* $x=\pi n$, *где n — целое число.*

3. Перечислите все элементарные функции школьного курса, претерпевающие разрыв.

Степенные функции с целым отрицательным показателем, тригонометрические функции: $y = \mathrm{tg}\,x$, $y = \mathrm{ctg}\,x$.

Справочные материалы

Вычисление пределов основано на бесконечно малых величинах.

1. Таблица пределов.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0;\ \lim_{n\to\infty}\frac{c}{n^k}=0;\ \lim_{n\to\infty}q^n=0,\text{ если }|q|<1.$$

2. Правила нахождения пределов (свойства пределов).

Если $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a,\ \lim\limits_{n\to\infty}y_n=b$, то:

$$\lim_{n\to\infty}c=c;\quad \lim_{n\to\infty}(k\cdot x_n)=k\cdot a\ \lim_{n\to\infty}(x_n+y_n)=a+b;\quad \lim_{n\to\infty}(x_n\cdot y_n)=a\cdot b;\quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_n}{y_n}\right)=\frac{a}{b},\text{ где } b\neq 0.$$

3. Основной приём для нахождения пределов дробей — использование основного свойства дроби.

$$\frac{b}{c}=\frac{ab}{ac};\ \frac{b}{c}=\frac{\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}},\text{ где } a\neq 0.\text{ Пример: }\lim_{x\to+\infty}\frac{8x^3-6x^2+x}{4x^3-4x^2-7}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{8x^3-6x^2+x}{x^3}}{\frac{4x^3-4x^2-7}{x^3}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{8-\frac{6}{x}+\frac{1}{x^2}}{4-\frac{4}{x}-\frac{7}{x^3}}=\frac{8}{4}=2.$$

Задания

По графику функции $f(x)$ найдите пределы. Пунктирными прямыми изображены асимптоты.

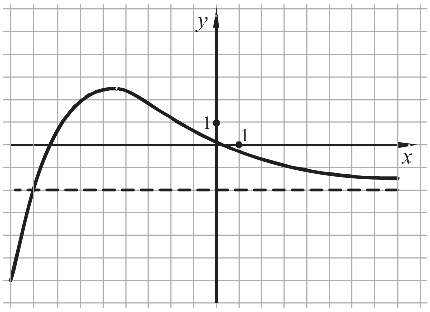


Рис. 1

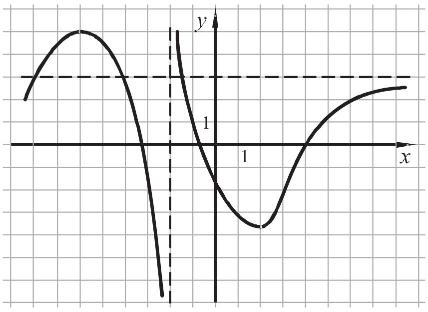


Рис. 2

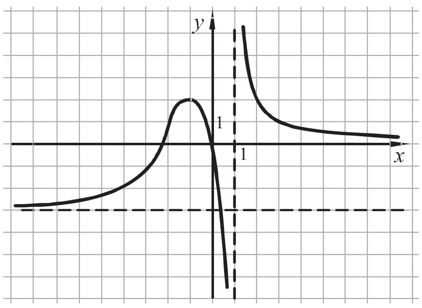


Рис. 3

Рис. 1: а) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$; в) $\lim\limits_{x\to3}f(x)$; г) $\lim\limits_{x\to-8}f(x)$; д) $\lim\limits_{x\to-3}f(x)$.

Рис. 2: а) $\lim\limits_{x\to-2_{+0}}f(x)$; б) $\lim\limits_{x\to-2_{-0}}f(x)$; в) $\lim\limits_{x\to-4}f(x)$; г) $\lim\limits_{x\to-3}f(x)$; д) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

Рис. 3: а) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$; в) $\lim\limits_{x\to3}f(x)$; г) $\lim\limits_{x\to1-0}f(x)$; д) $\lim\limits_{x\to1_{+0}}f(x)$.

2. Вычислите пределы на бесконечности.

а) $\lim\limits_{x\to+\infty}(3x^3-119x^2+3x-6)$; б) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-5x^2+36x+6}{7x^3-4}$; в) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-5x^4-6x^2+x}{2x^4-43}$; г) $\lim\limits_{x\to+\infty}(-x^4-19x^2+3)$;

д) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3+6x^2-11}{7x^2-4x^3}$; е) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6x^4+x^3-17}{2x^4-4x^2-1}$.

3. Вычислите пределы в точке.

а) $\lim\limits_{x\to1}(-x^4-9x^2+3)$; б) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3+6x^2-11}{7x^2-4x^3}$; в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{6x^2+x-17}{2x^4-4x^2-1}$; г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^3+6x^2-7x}{5x}$; д) $\lim\limits_{x\to0_{-0}}\dfrac{x^3+6x^2-5x}{7x^2}$;

е) $\lim\limits_{x\to6}\dfrac{x^3-36x}{x-6}$; ж) $\lim\limits_{x\to9}\dfrac{x-9}{\sqrt{x}-3}$; з) $\lim\limits_{x\to2_{+0}}\dfrac{x}{x-2}$; и) $\lim\limits_{x\to2_{-0}}\dfrac{x}{x-2}$.

Ответы

1. Рис. 1: а) $-\infty$; б) -2; в) -1; г) -2; д) 2. Рис. 2: а) $+\infty$; б) $-\infty$; в) 3; г) -1; д) 3. Рис. 3: а) -3; б) 0; в) 1; г) $-\infty$; д) $+\infty$. **2.** а) $+\infty$; б) 0; в) $-2{,}5$; г) $-\infty$; д) $-0{,}25$; е) 3. **3.** а) -7; б) $-\dfrac{6}{11}$; в) 17; г) $-1{,}4$; д) $+\infty$; е) 72; ж) 6; з) $+\infty$; и) $-\infty$.

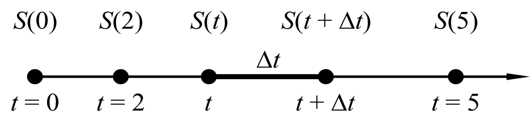
Алгебра 10–11 ТК № 24. Понятие производной. Геометрический и физический смысл производной

Понятия, определения, правила:

- *Приращение аргумента и приращение функции,*
- *Производная функции, дифференцирование функции.*
- *Мгновенная скорость, физический смысл производной.*
- *Секущая и касательная к графику функции в точке с абсциссой x_0.*
- *Тангенс угла между касательной и положительным направлением оси Ox, геометрический смысл производной.*

I. Задачи, приводящие к понятию производной функции

1. **О мгновенной скорости тела.**
Тело движется прямолинейно по закону
$S(t) = 2t^2 - 1$



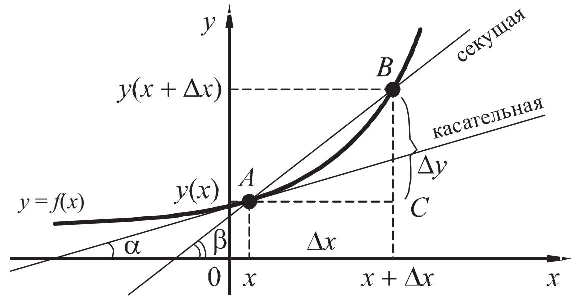
Средняя скорость за время от $t_1 = 2$ до $t_2 = 5$:

$$V_{ср} = \frac{S(t+\Delta t) - S(t)}{\Delta t}; V_{ср} = \frac{S(5) - S(2)}{5-2}.$$

Мгновенная скорость в момент времени t:

$$V_{мгн} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{S(t+\Delta t) - S(t)}{\Delta t}.$$

2. **Об угловом коэффициенте ($\operatorname{tg}\alpha$) касательной к графику функции $f(x)$**



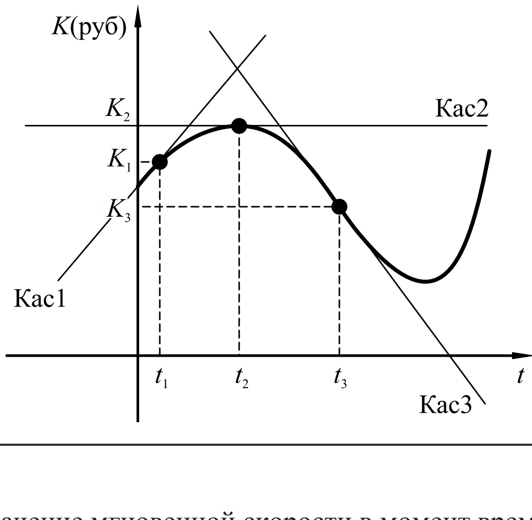
Δx — приращение аргумента,
Δf (или Δy) — приращение функции $y = f(x)$.

$$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$$

1) Из ΔABC: $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{\Delta f}{\Delta x}$, где β — угол между секущей и положительной полуосью Ox.

2) $\operatorname{tg}\alpha = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$, где α — угол между касательной и положительной полуосью Ox.

3. **О скорости роста и падения капитала**



1) В момент времени t_1: **касательная 1** образует с осью Ox острый угол, тангенс угла положителен — величина (скорость) изменения капитала положительна, **капитал ↑ растёт**.

2) В момент времени t_2: **касательная 2** параллельна оси Ox, угол и тангенс угла равны нулю — величина (скорость) изменения капитала равна нулю, капитал не изменяется (стабилен).

3) В момент времени t_3: **касательная 3** образует с осью Ox тупой угол, тангенс угла отрицателен — величина (скорость) изменения капитала отрицательна, **капитал ↓ падает.**

Выводы

Значение мгновенной скорости в момент времени ***t*** — это производная функции (закона движения) в момент ***t***.

Значение тангенса угла между касательной к графику функции в точке с абсциссой ***x*** и положительной полуосью Ox — это производная функции в точке ***x***.

Вопросы для контроля

1. В чем отличие между секущей и касательной к графику функции? Объясните словосочетание «касательная как предельное положение секущей».

2. Какую информацию о реальном процессе, описываемом математической функцией, даёт знание о производной этой функции в конкретной точке?

3. Укажите практический способ нахождения производной функции в заданной точке, если функция задана графически.

II. Определение производной функции	
Предел (число) отношения приращения функции Δf к приращению аргумента Δx, когда приращение Δx стремится к нулю, **называют производной** функции $\boldsymbol{f(x)}$ в точке $\boldsymbol{x}$.	$f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$
Операция нахождения производной называется **дифференцированием функции.**	
Если функция имеет производную в каждой точке некоторого промежутка, то эта **функция называется дифференцируемой** на этом промежутке.	

III. Примеры вычислений производной		
Мгновенная скорость в момент времени $\boldsymbol{t}$	Тангенс угла наклона касательной к графику функции в заданной точке	Производная функции в заданной точке $\boldsymbol{x}$
Дано: $S(t)=2t^2-1,\ t=2.$ 1) $S(t+\Delta t)=2(t+\Delta t)^2-1=$ $=2t^2+4t\cdot\Delta t+2(\Delta t)^2-1.$ 2) $\Delta S=S(t+\Delta t)-S(t)=$ $=2t^2+4t\Delta t+2(\Delta t)^2-1-(2t^2-1)=$ $=4t\cdot\Delta t+2(\Delta t)^2=\Delta t(4t+2\Delta t).$ 3) $V_{мгн}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta t(4t+2\Delta t)}{\Delta t},$ $V_{мгн}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}(4t+2\Delta t)=4t.$ 4) $V_{мгн}(2)=4\cdot 2=8.$ *Ответ*: 8.	**Дано:** $f(x)=x^2,\ x=3.$ 1) $f(x+\Delta x)=(x+\Delta x)^2=$ $=x^2+2x\cdot\Delta x+(\Delta x)^2.$ 2) $\Delta f=f(x+\Delta x)-f(x)=$ $=x^2+2x\cdot\Delta x+(\Delta x)^2-x^2=$ $=2x\cdot\Delta x+(\Delta x)^2=\Delta x(2x+\Delta x).$ 3) $\operatorname{tg}\alpha=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta x(2x+\Delta x)}{\Delta x},$ $\operatorname{tg}\alpha=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x)=2x.$ 4) $\operatorname{tg}\alpha\ (3)=2\cdot 3=6.$ *Ответ*: 6.	**Дано:** $f(x)=x^3,\ x=-2.$ 1) $f(x+\Delta x)=(x+\Delta x)^3=$ $=x^3+3x^2\cdot\Delta x+3x(\Delta x)^2+\Delta x^3.$ 2) $\Delta f=f(x+\Delta x)-f(x)=$ $=x^3+3x^2\cdot\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3-x^3=$ $=3x^2\cdot\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3=$ $=\Delta x(3x^2+3x\Delta x+\Delta x^2).$ 3) $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta x(3x^2+3x\Delta x+(\Delta x)^2)}{\Delta x},$ $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(3x^2+3x\Delta x+(\Delta x)^2)=3x^2.$ 4) $f'(x)=3\cdot(-2)^2=12.$ *Ответ*: 12.

IV. Физический (механический) и геометрический смысл производной	
Если тело движется прямолинейно, и путь, пройденный телом, есть функция от времени t, то есть $S=f(t)$, то его **скорость** $V(t)$ **в момент** $\boldsymbol{t}$ численно **равна значению производной пути** по времени, то есть $V(t)=f'(t)$. Эту скорость называют мгновенной скоростью.	Если к графику функции $y=f(x)$ в точке x_0 проведена касательная, то **тангенс угла** α между касательной и положительным направлением оси Ox численно **равен значению производной функции** $f'(x_0)$ в точке x_0, то есть $\operatorname{tg}\alpha=f'(x_0)$. Этот угол называют углом наклона касательной.

ТК № 24. Понятие производной. Геометрический и физический смысл производной

Содержание

- Задачи, приводящие к понятию производной.
- Определение производной функции.
- Примеры вычисления производной.
- Геометрический и физический (механический) смысл производной.

Использование

- При изучении темы «Понятие производной».
- При изучении блока тем раздела «Математический анализ».
- При подготовке к итоговым испытаниям.

Сопровождение

1. Изучение темы «Производная» особенно важно начать с «вхождения в тему». Сразу вводить определение производной не продуктивно. Пока ученики внутренне не ощутят, что:

- любой жизненный (физический, экономический, медицинский, демографический и т.д.) процесс можно описать функцией от времени (создать математическую модель) и представить её графически;
- скорости изменения функции в разные конкретные моменты времени могут быть разными;
- состояние функции и скорость изменения функции в заданной точке — суть разные величины; вводить определение производной нецелесообразно. Введение определения производной предваряет рассмотрение, по крайней мере, трёх задач, которые помогут понять и буквально увидеть мгновенную скорость изменения функции в каждой отдельной точке. Пусть ученики потренируются сравнивать эти скорости. Задача о росте и падении капитала наиболее доступна ученикам и помогает перейти от конкретной экономической ситуации к абстрактной математической задаче и математической функции, где независимую переменную заменяем на x, зависимую — на y; переходим на математический язык приращений, секущих и касательных, бесконечно малых и предельных переходов. Для среднего ученика понять и прочувствовать определение производной, необходимость её рассмотрения и применения в любой сфере жизнедеятельности человека — большая проблема. Именно поэтому, продолжая изучение темы в течение 15–20 занятий, всякий раз начинаем с краткого напоминания практических задач. Краткое повторение положений, приведших к понятию производной, может быть таким:

1) Все важные процессы в любой области жизнедеятельности человека описываются зависимостями — суть математическими функциями.

2) Если хотим, чтобы в нашей жизни как можно быстрее: рос капитал, издержки уменьшались, знания прибавлялись, температура больного падала, прирост населения рос и т.д., тогда нужно постоянно обращать внимание не только на состояние процесса, но и на его изменения.

3) Следовательно, необходимо как можно чаще отслеживать скорость изменения параметров того или иного процесса (функции), А это значит, знать значение скорости его изменения в конкретный момент времени. Умение находить мгновенную скорость в заданный (любой) момент времени позволяет прогнозировать течение процесса, что позволяет быть менее уязвимым, а, следовательно, конкурентно способным и успешным в жизни.

Вывод: желаемого не достигнуть, если не использовать производную в науке и жизни!

2. Большую роль для понимания производной играет усвоение физического и геометрического смысла производной. Это достигается посредством решения практических задач, лучше заданных наглядно, то есть графически. Решение прямых и обратных задач, в той или иной формулировке заданий, одинаковых по сути, синонимических по звучанию. Например, найти тангенс угла касательной и угловой коэффициент прямой и т.д. Ведь ещё одна проблема для учеников при изучении темы «Производная» заключается в изобилии новых понятий и терминов, в слабой подготовительной базе, в частности, в практическом отсутствии по программе задач на нахождение углового коэффициента прямой.

Вопросы для контроля

1. В чем отличие между секущей и касательной к графику функции? Объясните словосочетание «касательная как предельное положение секущей».

Секущая в заданной точке всегда «разрезает» кривую графика функции, и точки графика, сколь угодно близкие к заданной точке, лежат по разные стороны от секущей. Касательная касается в заданной точке кривой графика, и точки графика, сколь угодно близкие к заданной точке, как правило, лежат по одну сторону от касательной. Однако есть отдельные случаи так называемых точек перегиба, когда и касательная «разрезает» кривую графика.

2. Какую информацию о реальном процессе, описываемом математической функцией, даёт знание о производной этой функции в конкретной точке?

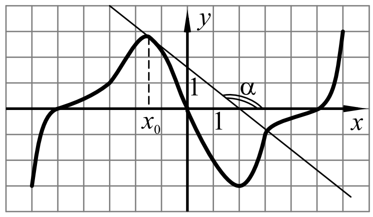
Значение производной в конкретной точке — значение мгновенной скорости изменения функции в этой точке или значение углового коэффициента (тангенса угла), образованного касательной, проведённой к графику в точке и положительной полуосью Ох.

3. Укажите практический способ нахождения производной функции в заданной точке, если функция задана графически.

- *Выделим точку графика с заданной абсциссой.*
- *Аккуратно с помощью линейки проведём касательную к графику в этой точке.*
- *Выделим угол, образованный касательной с положительным направлением оси Ох, взятый в верхней полуплоскости.*
- *Транспортиром измерим этот угол и найдём тангенс этого угла. Полученный результат — значение производной функции в заданной точке.*
- *Или ещё проще без транспортира. Проведём любую вертикальную прямую, пересекающую касательную и ось Ох так, что образуется прямоугольный треугольник, в котором, как отношение катетов, найдем тангенс угла. Главное — не забыть! Если угол тупой, то находим тангенс смежного с ним острого угла. Наш ответ — противоположное число найденному значению тангенса.*

Задания

Недостаток места для заданий не позволяет их широко представить. Ограничимся лишь перечнем формулировок заданий, а сами задания несложно составить или найти во многих задачниках. Для первых уроков изучения темы «Производная» полезно решить следующие задачи.



- Найдите значение производной функции в заданной точке x_0.
- Определить угловой коэффициент касательной (или найти тангенс угла наклона), проведённой к графику функции $f(x)$ в точке x_0.
- Найти значение абсциссы точек графика, если известен угловой коэффициент касательной, проведённой к графику функции $f(x)$ в точке x_0 (очень полезная, обратная задача).
- По рисунку найдите значение производной в точке.

В заключение приведём примеры вспомогательных задач, которые хорошо бы порешать до введения понятия производной.

Задача. По рисунку найти угловой коэффициент прямых: а, б, …, ж.

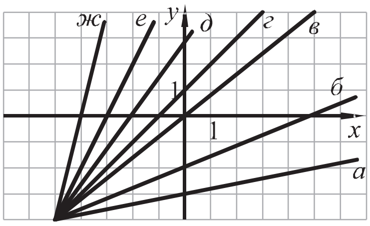


Рис. 1

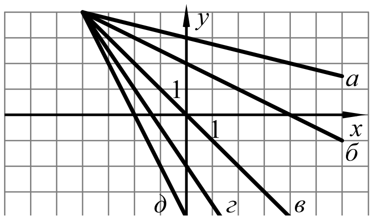


Рис. 2

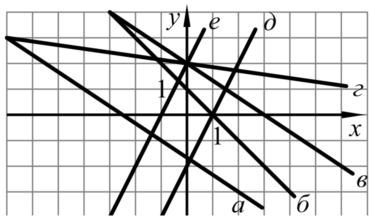


Рис. 3

Ответы

Рис. 1: а) 0,2; б) 0,4; в) 0,8; г) 1; д) 1,4; е) 2; ж) 4.

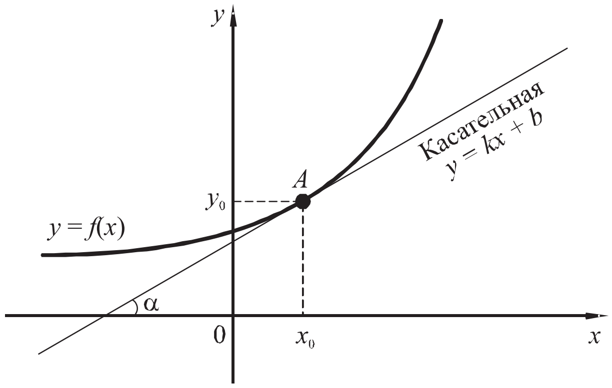
Рис. 2: а) –0,25; б) –0,5; в) –1; г) –1,5; д) –2.

Рис. 3: а) $-\frac{2}{3}$; б) –1; в) $-\frac{2}{3}$; г) $-\frac{1}{7}$; д) 2; е) 2.

Алгебра 10–11 ТК № 25. Применение производной. Уравнение касательной. Дифференциал. Приближённые вычисления

Понятия, определения, правила:

- *Уравнение прямой, угловой коэффициент прямой.*
- *Тангенс угла между прямой и положительной полуосью Ох.*
- *Геометрический смысл производной.*
- *Дифференциал функции, приближённые вычисления.*

I. База знаний. Повторение	**II. Уравнение касательной, проведённой к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0**
Определение производной $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$  **Геометрический смысл производной:** $\operatorname{tg}\alpha = f'(x_0)$. Угол α образован касательной и положительным направлением оси Ox и расположен в верхней полуплоскости; $f'(x_0)$ — значение производной функции в точке x_0.	**Теорема:** Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на $(a; b)$ и дифференцируема в точке x_0. Тогда функция в точке $(x_0; y_0)$ имеет касательную, уравнение которой: $y - y_0 = k(x - x_0)$, где $y_0 = f(x_0)$, $k = f'(x_0)$. Итак, уравнение касательной в точке с абсциссой x_0 имеет вид: $\boxed{y - f(x_0) = f'(x_0)\cdot(x - x_0)}$ **Доказательство:** 1. Касательная — суть прямая. 2. Уравнение прямой: $y = kx + b$, где k — угловой коэффициент прямой. 3. Из геометрического смысла производной следует, что $k = \operatorname{tg}\alpha = f'(x_0)$. Касательная проходит через точку графика $A(x_0; y_0)$. Выразим b из равенства: $y_0 = kx_0 + b$ и, подставив в уравнение прямой, получим уравнение касательной.

III. Алгоритм написания уравнения касательной	
Постановка задачи **Дано:** $y = f(x)$ **и значение** $\boldsymbol{x_0}$**.** **Написать уравнение касательной.** **Алгоритм решения** 1. Найти $f'(x)$ и вычислить значение $k = f'(x_0)$. 2. Вычислить значение $y_0 = f(x_0)$. 3. Подставить полученные значения (числа x_0, y_0, k) в уравнение касательной: $y - f(x_0) = f'(x_0)\cdot(x - x_0)$ и, упростив уравнение, привести его к виду: $y = kx + b$. **В ответе записать уравнение касательной (прямой)**.	**Применение алгоритма** **Дано:** $f(x) = \sin x$, $x_0 = 0$. **Написать уравнение касательной.** **Решение** 1) $f'(x) = \cos x$, $k = f'(x_0) = \cos 0 = 1$. 2) $f(x_0) = \sin 0° = 0$. 3) $y - f(x_0) = f'(x_0)\cdot(x - x_0)$, $y - 0 = 1\cdot(x - 0)$ или $y = x$. *Ответ*: $y = x$.

Вопросы для контроля

1. Объясните, в чём отличие прямой и обратной задач на тему «Уравнение касательной».
2. Попробуйте сформулировать алгоритм решения обратной задачи на тему «Уравнение касательной».

IV. Задачи на тему «Уравнение касательной»

Пример 1. Прямая задача

Дано: $f(x) = x^3 - 3x^2 - 5$, $x_0 = 1$.

Написать уравнение касательной.

Решение.

1) $f'(x) = 3x^2 - 6x$.
 $k = f'(x_0) = f'(1) = 3 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 = -3$.

2) $f(x_0) = f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1^2 - 5 = -7$.

3) $y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$,
 $y - (-7) = -3 \cdot (x - 1)$ или $y = -3x - 4$.

Ответ: $y = -3x - 4$.

Пример 2. Обратная задача

Задача. На графике $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$ найдите точку, в которой касательная образует с осью Ox угол 45°.

Решение. Так как угол равен 45°, то tg 45° = 1. Согласно геометрическому смыслу производной $f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha_{\text{кас}}$, поэтому $f'(x) = \operatorname{tg} 45° = 1$.

Из условия $f'(x) = 1$ определим x_0.

1) $f'(x) = 4x - 3$.

2) Так как $f'(x) = 1$, то $4x - 3 = 1$, находим $x = 1$.
 Итак, $x_0 = 1$.

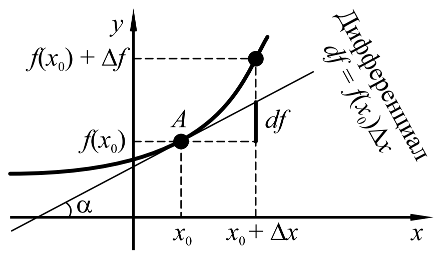
3) Найдём $f(x_0)$. $f(x_0) = f(1) = 2 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 + 1 = 0$.

Ответ: В точке графика (1; 0).

V. Дифференциал функции

Приращение $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ достаточно мало. Для любой дифференцируемой функции $y = f(x)$ приращение Δf можно представить в виде суммы двух слагаемых: $\operatorname{tg}\alpha \cdot \Delta x$ — линейного относительно Δx и нелинейного, имеющего более высокий порядок малости относительно Δx.

Линейная часть называется дифференциалом функции df и равна



$$\boxed{df = f'(x_0)\Delta x,}$$

где $f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha$ (геометрический смысл производной). df — большая часть приращения, тогда $\Delta f \approx df$. Дифференциал функции используем при приближённых вычислениях.

VI. Применение производной (дифференциала) функции в приближённых вычислениях

Постановка задачи

Пусть функция $y = f(x)$ имеет производную в точке x_0 и известно значение $f(x_0)$. Тогда приближённое значение функции в точке $x_0 + \Delta x$ при достаточно малом значении Δx можно вычислить по формуле

$$\boxed{f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x.} \qquad (1)$$

Обоснование

Из определения производной следует, что при достаточно малом приращении Δx значение производной $f'(x_0)$ в точке x_0 отличается от значения разностного отношения $\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ на очень малую величину: $f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$, откуда следует (1).

Пример

Дано: $f(x) = \sin x$.

Найти: $f(32°)$.

Решение: По формуле (1) имеем:

1) $x_0 = 30°$, $\Delta x = 2° = \frac{2\pi}{180}$ рад $\approx 0{,}035$.

2) $f(x_0) = \sin 30° = 0{,}5$.

3) $f'(x) = \cos x$, $f'(x_0) = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}866$.

4) $df = f'(x_0)\Delta x = f'(30°) \cdot 0{,}035$.

По формуле (1) находим $f(32°)$:

$f(32°) \approx f(30°) + f'(30°) \cdot 0{,}035$.

$f(32°) \approx 0{,}5 + 0{,}866 \cdot 0{,}035 \approx 0{,}530$.

Ответ: 0,530.

ТК № 25. Применение производной. Уравнение касательной. Дифференциал. Приближённые вычисления

Содержание

- Повторение: определение производной, геометрический смысл производной.
- Уравнение касательной, доказательство.
- Алгоритм написания уравнения касательной.
- Задачи на уравнение касательной: прямая и обратная.
- Дифференциал функции.
- Применение дифференциала в приближённых вычислениях. Пример.

Использование

- При изучении темы «Производная. Уравнение касательной».
- При изучении блока тем раздела «Математический анализ».
- При подготовке к итоговым испытаниям.

Сопровождение

Уравнение касательной — важная тема в разделе математического анализа не только потому, что вопросы, связанные с уравнением касательной выходят на итоговую аттестацию. Главное — через положение (уравнение) касательной исследуется и понимается все, что связано со значением мгновенной скорости в заданной точке любого процесса природы и общества. Не случайно открытый Ньютоном метод исследования так и звучал в переводе как «метод касательных». При объяснении темы «Касательная» важно донести применимость касательных для исследования свойств функций. Часто ученик не понимает, зачем нужно уравнение касательной, что должно быть в ответе к задаче, в которой просят написать уравнение касательной, а потому и слабо усваивает эту тему. Ученику сложно соединить в логическую цепочку, что касательная — суть прямая, что общее уравнение прямой $y = kx + b$. Значит, в ответе на задание «напишите уравнение касательной» должно быть конкретное уравнение прямой, где параметры k и b найдены. Остаётся ещё один камень преткновения: как сопоставить уравнения $y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$ и $y = kx + b$? Всё это важно разъяснять и разъяснять по нескольку раз, всякий раз сопровождая графическими образами, что, безусловно, влияет на мотивацию выполнения заданий, но, главное, на понимание метода касательных в целом как основы дифференциального анализа. Обязательно упоминаем историческую страничку, связанную с поиском метода описания движения твердого тела Исааком Ньютоном во время «чумных каникул», это производит неизгладимое впечатление.

1. В начале изучения темы важен акцент на геометрический смысл производной. Хорошо решить простые задачи на графиках, выполнить практическую работу: к точно построенному графику известной функции, например $y = x^2$, провести несколько касательных в разных точках, геометрически найти угловой коэффициент и записать уравнения этих прямых — касательных. Тем самым осознаём, что к одному графику можно провести бесконечное число касательных, и их положение зависит от вида функции и точки, в которой проводим касательную. Это очень важно, а ещё отпадает сложный вопрос о касательной как прямой и её уравнении $y = kx + b$.

2. Поставим проблемный вопрос: как аналитически получить уравнение касательной, не прибегая к графическим образам и не проводя касательных. Получаем уравнение касательной, обосновываем его (табл. II).

3. Прорабатываем алгоритм и пошагово рассматриваем пример написания уравнения касательной (табл. III). Закрепляем знания, решая ту же задачу (пункт 1), только аналитически. Оцениваем результаты, фиксируем расхождения при аналитическом и графическом решениях.

4. Решаем практические задачи, обращая внимание на прямую и обратные задачи (табл. IV). Сколько обратных задач можно сформулировать? Основная — по виду функции и значению углового коэффициента касательной ищем точку, в которой проведена касательная. Можно ли ещё сформулировать обратные задачи?

5. Дополнительные материалы ТК — дифференциал и приближённые вычисления (табл. V–VI) — изложены с графической интерпретацией и примером приближённого вычисления.

Вопросы для контроля

1. Объясните, в чём отличие прямой и обратной задач на тему «Уравнение касательной».

Прямая и обратная задачи в классическом понимании — это задачи, в которых что дано и что найти меняются местами. В прямой задаче на уравнение касательной даны: функция и абсцисса точки графика, в которой проводится касательная; надо написать уравнение касательной. В обратной задаче заданы: функция и угловой коэффициент касательной (или тангенс угла наклона касательной; или угол, образованный касательной с положительным направлением оси Ox); а найти надо абсциссу точки графика, в которой проведена касательная или написать уравнение касательной.

2. Попробуйте сформулировать алгоритм решения обратной задачи на тему «Уравнение касательной».

Пусть задана функция $y = f(x)$ и угловой коэффициент k касательной. Найти x_0.

Алгоритм:

1) Найдем производную $f'(x)$.

2) Решим уравнение $f'(x) = k$ (геометрический смысл производной) и найдём x_0.

3) В зависимости от вопроса задачи в ответ записываем значение абсциссы x_0, или координаты точки графика, или уравнение касательной и т.д.

Главное! Шаги 1–2 обязательны, они завершаются нахождением x_0. После этого можно двигаться в любом направлении решения предложенной задачи.

Задания

1. Дана функция $y = x^2 + 2x - 3$.

а) Напишите уравнение касательной к графику функции в точке $x_0 = 1$.

б) В одной системе координат постройте график функции и график касательной. Убедитесь в верности выполнения задания.

2. Напишите уравнение касательной, проведённой к графику функции $f(x)$ в точке с абсциссой x_0.

а) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + x^3 - 2x^2 + 3,\ x_0 = -1$; б) $f(x) = (2x-3)^3,\ x_0 = 2$;

в) $f(x) = (2x-3)\cos x,\ x_0 = 0$; г) $f(x) = 2\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right),\ x_0 = \pi$.

д) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{-3x + 4},\ x_0 = 1$; е) $f(x) = \sqrt{2 - 7x},\ x_0 = -1$.

3. Найдите тангенс угла наклона касательной к графику функции в точке с абсциссой x_0:

а) $f(x) = \sin x,\ x_0 = \frac{\pi}{4}$; б) $f(x) = 2\cos 3x,\ x_0 = \frac{\pi}{18}$; в) $f(x) = \operatorname{tg} x,\ x_0 = \frac{\pi}{4}$.

4. Касательная к кривой $y = 5x^2 - 5$ образует с осью абсцисс угол 60°. Найдите абсциссу точки касания.

5. В какой точке параболы $y = 0{,}5x^2 + 1$ касательная к ней параллельна прямой $y = -x - 1$?

6. Найти угол между прямой $x = 3$ и параболой $y = x^2$.[1]

7. Найдите тангенс угла наклона касательной функции $f(x) = \cos(x + 3)$ в точке с абсциссой $x = -3$.

8. Найдите координаты точки, в которой касательная к параболе $y = x^2 - x - 12$ образует с осью Ox угол 45°.

9. Какова абсцисса точки, в которой кривая $y = \sqrt[3]{x}$ наклонена к оси абсцисс под углом 45°?

10. Под какими углами касательные, проведённые к графику функции $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{3}x^2 - x$ в нулях функции, пересекают ось Ox?

Ответы

1. а) $y = 4x - 4$. **2.** а) $y = 6x + 6{,}25$; б) $y = 6x - 11$; в) $y = 2x - 3$; г) $y = -0{,}5x + \frac{\pi}{2} + \sqrt{3}$; д) $y = 2x - 2$; е) $y = -\frac{7}{6}x + \frac{11}{6}$. **3.** а) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) –3; в) 2. **4.** $\frac{\sqrt{3}}{10}$. **5.** –1. **6.** $\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} 6$. **7.** 0. **8.** 1. **9.** $\frac{1}{3\sqrt{3}}$. **10.** $\operatorname{arctg}\frac{4}{3}$; 135°; $\operatorname{arctg} 4$.

---

[1] Угол между прямой и кривой (угол между двумя кривыми) находят как угол между прямой и касательной, проведеннной к кривой в точке их пересечения (как угол между касательными).

Содержание

Предисловие . . . 3
Теоретические конспекты . . . 4
ТК № 23. Предел числовой последовательности. Предел функции. Непрерывность функции . . . 4
ТК № 24. Понятие производной. Геометрический и физический смысл производной . . . 8
ТК № 25. Применение производной. Уравнение касательной. Дифференциал. Приближённые вычисления . 12
ТК № 26. Применение производной. Экстремумы. Наибольшее значение функции . . . 16
ТК № 27. Применение производной. Монотонность функции . . . 20
ТК № 28. Применение производной. Исследование функции и построение графика . . . 24
ТК № 29. Первообразная и интеграл . . . 28
ТК № 30. Сквозные методы решения. . . . 32
ТК № 31. Решение уравнений. Равносильные переходы . . . 40
ТК № 32. Решение неравенств. Равносильные переходы . . . 44
ТК № 33. Уравнения и неравенства с модулем. Алгоритмы решения . . . 48
ТК № 34. Функциональные подходы к решению уравнений . . . 54
ТК № 35. Рационализация неравенств . . . 58
ТК № 36. Делимость чисел и делимость многочленов . . . 64
ТК № 37. Делимость. Сравнение чисел по модулю. Диофантовы уравнения . . . 70
ТК № 38. Метод математической индукции . . . 74
ТК № 39. Комбинаторика . . . 78
ТК № 40. Теория вероятностей. Основные понятия. Классические примеры вероятностных задач . . . 82
ТК № 41. Теория вероятностей. Решение вероятностных задач . . . 86
Использование ТК . . . 92