В.В. Лебедев

МАТЕМАТИКА: МЫСЛИТЕЛЬНЫЕ СТРАТЕГИИ, МЕТОДЫ, АЛГОРИТМЫ, ИЛИ НАЧИНАЕМ ВМЕСТЕ ДУМАТЬ И РЕШАТЬ

Учебное пособие

Москва
ИЛЕКСА
2024

УДК 372.851:512+371.322.6
ББК 74.262.21+22.1
Л 33

Автор:
В.В. Лебедев, к.п.н., доцент, старший методист
Института развития профильного обучения ГАОУ ВО МГПУ

Лебедев В.В.
Л 33 Математика: мыслительные стратегии, методы, алгоритмы, или Начинаем вместе думать и решать: Учеб. пособие. – М.: Илекса, 2024. – 249 с.
ISBN 978-5-89237-722-5

Учебное пособие по математике направлено на развитие мыслительной деятельности обучающихся на основе постоянного сопровождения развёртывания их мыслительных стратегий при анализе и решении заданий по основным разделам математики.

Учебное пособие даст:

учащимся – возможность самостоятельно освоить мыслительные подходы, методы и алгоритмы решения заданий по математике, что послужит основой для успешной подготовки к итоговым государственным экзаменам;

учителю – новые подходы к обучению школьников в области решения математических заданий различного уровня сложности;

родителям – надёжный источник оказания помощи ребёнку в освоении математических знаний, особенно в условиях дистанционного обучения.

Адресовано учащимся и их родителям, учителям, преподавателям математики общеобразовательных учебных организаций и организаций среднего профессионального образования.

УДК 372.851:512+371.322.6
ББК 74.262.21+22.1

ISBN 978-5-89237-722-5

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение

Сейчас вы читаете эти строки, а мы ничего не знаем о вас. Но нам очень важно, чтобы ваше прикосновение к этой книге продолжалось так долго, как вам понадобится, чтобы полностью взять у неё всё, что вам нужно. И если вы хотите спокойно выполнить задания ОГЭ и ЕГЭ, поступить в институт, а у вас есть проблемы с математикой, то вы читаете именно ту книгу. Книгу, которая позволит вам увидеть, насколько лёгким может оказаться то, что раньше вызывало затруднения. Если же вы хорошо справляетесь с математикой, книга покажет вам универсальные подходы к тому, как нужно выбирать метод решения, чтобы он был наиболее эффективным. Она позволит выстроить ваши знания в стройную систему. Если вы обладаете способностями к математике, то книга даст вам возможность увидеть, как нужно выстраивать последовательность мышления, чтобы добиться нужных результатов. Но как бы вы ни оценивали свои силы, всегда можно распахнуть горизонт своих способностей и увидеть перед собой новые перспективы, найти новые точки опоры, с которых гораздо легче рассматривать знакомые вещи и видеть новое во взаимосвязи с известным.

Мы предполагаем, что вы захотите максимально использовать возможности, предоставленные этой книгой. Если это так, то возьмите чистый лист бумаги и закройте весь текст ниже той строки, о которой мы вам скажем чуть позже. Когда это произойдёт, вы будете читать строку за строкой, сдвигая лист. Там, где вы увидите слово **«ВОПРОС»**, остановите движение листа. Ответьте на поставленный вопрос, а затем продолжите чтение. Это же относится и к заданиям. Сначала решите его так, как сможете, а затем, сдвигая лист, сверьтесь с тем, что предлагает вам книга.

Можете начать использовать лист.

Как вы полагаете, когда человек начинает думать?

Вы уже сдвинули лист. Интересно, как вы сформулировали свой ответ. **Люди начинают думать тогда, когда задают себе вопрос (или им его задают) и начинают искать на него ответ.**

Великий Эйнштейн как-то сказал: «Если бы мне стало известно, что на меня готовится покушение и до его исполнения остался час, то я бы потратил 55 минут на то, чтобы правильно сформулировать вопрос, и 5 минут на то, чтобы решить эту проблему».

Как вы понимаете новое?

Первое, что надо сделать, это поставить перед собой вопрос: «ЧТО ЭТО?», «КТО ЭТО?» или «ЧТО ЭТО ЗНАЧИТ?» И, наверное, это один из самых важных вопросов, так как, не зная, что перед вами, вы не сможете определить, что с этим можно сделать, а что нельзя, как к этому относиться и стоит ли относиться вообще. Но бывает, что вы не знаете, что это. Тогда можно задать себе вопрос: «А на **что это похоже?»**. И ответ подскажет вам, в каком направлении думать дальше.

Представьте, что вы никогда не видели крокодила, даже на картинке, никогда не слышали о нём и даже не знаете такого названия. Представьте, что вы оказались на берегу незнакомой реки в достаточно жаркой и душной местности и наблюдаете некое длинное зелёное бревнообразное животное с мощным хвостом и длинной, вытянутой мордой, которая, учитывая её размер, может широко раскрыться. Весь ваш жизненный опыт, знание животного мира, какое бы оно ни было, заставят вас насторожиться и держаться от этого бревна подальше. Нет, конечно, есть такие люди, которые захотят всё-таки выяснить, что это, изучить, так сказать, поближе. Если такие и были, то вряд ли они читают эти строки.

Какой же вопрос последует за первым вопросом «ЧТО ЭТО?»?

Второй вопрос – это «ЧТО Я ХОЧУ?» относительно того, что передо мной. Так, в случае крокодила, скорее всего, вам захочется быть от него подальше.

Обычно на пути реализации наших желаний встречаются препятствия, а потому третий вопрос звучит так: ЧТО МНЕ МЕШАЕТ? (Что мешает достичь желаемого? Что стоит на пути? Какая преграда? ...)

Как вы думаете, каким должен быть следующий вопрос?

После того, как вы определите то, что вам мешает, естественно задать себе вопрос: Что нужно сделать, чтобы от этого ИЗБАВИТЬСЯ? И наконец, пятый вопрос: КАК ЭТО СДЕЛАТЬ?

Всмотритесь в эти пять вопросов.

1. Что это? Кто это? Что это значит?
2. Что я хочу?
3. Что мне мешает?
4. Что нужно сделать, чтобы от этого ИЗБАВИТЬСЯ?
5. Как это сделать?

Именно эти вопросы помогают людям решать самые сложные задачи, проблемы не только в математике, но и в жизни. И это, конечно, неполный перечень вопросов, которые позволяют нам организовывать свою деятельность в нужном направлении. С другими вопросами вы познакомитесь позже или сформулируете их сами. А сейчас вспомните какие-нибудь три ваши житейские проблемы, пусть они пока не будут глобальными, нечто достаточно простое. Выберите из них самую простую и примените к ней эти вопросы, последовательно отвечая на каждый из них. Найдя путь для её решения, перейдите ко второй проблеме, а затем к третьей.

Дерзайте, ибо, как сказано в одной мудрой книге, дорога в тысячу лье начинается с первого шага. И пусть эта проблема будет, как вам покажется, сложнее одевания в полной темноте, вы всё равно её одолеете. Кстати, **примените эти пять вопросов к проблеме одевания в полной темноте.**

Представьте, абсолютно тёмная ночь. Вы спите. Рядом лежит ваша одежда. Вы внезапно просыпаетесь и понимаете, что необходимо одеться и притом в полной темноте.

Как вы это сделаете?

Так как вы читаете эти строки, то это означает, что ответы на все четыре вопроса вы уже сформулировали и сейчас просто получаете удовольствие, сверяясь с нашими вариантами ответов.

А) 1. Я беру вещь и задаю себе вопрос: ЧТО ЭТО? На ощупь определяю качество ткани и вспоминаю, что из такой ткани у меня была футболка. Это футболка.

2. ЧТО Я ХОЧУ? Я хочу её надеть.

3. ЧТО МНЕ МЕШАЕТ? Я не знаю, где перед, где спинка футболки.

4. КАК ИЗБАВИТСЯ от этого незнания? Нужно определить либо перед, либо спинку футболки.

5. КАК ЭТО СДЕЛАТЬ? Варианты: определить по вырезу горловины; найти бирку на горловине; найти бирку, вшитую в левом боку.

Ищу нужное и надеваю футболку.

Б) Беру следующую вещь. ЧТО ЭТО? Качество ткани – это может быть рубашка, могут быть брюки (сделаны из одинакового материала). НА ЧТО ПОХОЖЕ? Ощупываю вещь, ищу какие-либо признаки: пуговицы, карманы, разрезы и т.д. Нахожу какую-нибудь деталь и делаю предположение: скорее всего, это брюки. Ищу ещё какой-нибудь признак, чтобы подтвердить своё предположение. Нахожу, убеждаюсь в справедливости предположения. Надеваю, так как уже знаю, что у меня в руках. И т.д.

Вы можете ещё раз пересмотреть три выбранные вами проблемы, включая в это рассмотрение пятый вопрос: КАК ЭТО СДЕЛАТЬ?

Вполне возможно, вы думаете, зачем всё это нужно? Ну что ж, всмотритесь в то, что рассказывалось очень-очень давно.

Голодный человек в обветшалой одежде подошёл к рыбаку и попросил его накормить. Посмотрев на него, рыбак спросил: «Ты уверен, что хочешь есть?» Человек быстро-быстро закивал головой. «Хорошо», – сказал рыбак. И продолжил: «Вон там лежит невод, это такие сплетённые нити, возьми его и отнеси к лодке». Человек вздохнул, огляделся, нашёл невод, взвалил его на себя и, недоумевая, понёс к морю. Рыбак пошёл за ним с двумя вёслами. Они сели в покачивающуюся на волнах лодку и вышли в море. И человек грёб вместе с рыбаком сначала неумело и неуверенно, а затем всё смелее и лучше, и, наконец, он сам привёл лодку к месту, где рыбак планировал ловить рыбу. Они закинули невод и поймали много рыбы. Вернувшись на берег, рыбак попросил человека собрать сухие ветки. Вместе они разожгли костёр, приготовили уху и запечённую рыбу. Когда наши герои насытились, а тепло заструилось во всём их теле, начиная от кончиков ног, протянутых к весело и ярко потрескивающему огню, человек спросил:

– Почему ты сразу не дал мне немного хлеба? Он ведь есть у тебя в хижине, почему ты заставил меня всё это проделать?

Рыбак немного помолчал и, щурясь от света жёлто-красных искр, взлетающих над костром, ответил:

– В этом случае я бы утолил твой голод, но только один раз, а так ты получил возможность быть сытым всю жизнь.

Интересно, что предпочтёте вы: получить нужное вам быстро и на один раз или чуть медленнее, но на всю жизнь.

Итак, мы почти готовы отправиться в плавание по бурному морю математики, но для этого нужно заполнить нашу ещё пустую лодку багажом и сесть в неё. Лодка уже стоит на воде, груз, его где-то полтонны, на берегу. И вам предстоит его разместить в лодке. КАК ВЫ ЭТО СДЕЛАЕТЕ? Продумайте свой вариант распределения груза и затем смело сдвигайте лист на следующую строку.

Если вы положили весь груз на один из концов лодки, то она, скорее всего, уже перевернулась. Если вы положили его на середину лодки, то грести вёслами, сидя на нём, вряд ли будет удобно. Мы думаем, что вы равномерно распределили груз по обе стороны лодки, на корме и на носу, и, сев в её середину, легко отплыли от берега.

Итак, мы с вами вышли в море и для того, чтобы достичь желанного места, нам понадобятся **карты** или **путеводители**, которые помогут выбрать правильный маршрут и избежать опасностей.

Глава 1. Линейные уравнения, неравенства, модули и параметры в них

1.1. Линейные уравнения

$8 = 8$.

Вы уже ответили на вопрос: ЧТО ЭТО?

Да, это равенство двух математических выражений. В обеих его частях стоят одинаковые числовые значения.

ЧТО МОЖНО ДЕЛАТЬ с равенством?

Интересно, вы читаете эти строки после того, как ответили на поставленный вопрос, или ещё думаете, как на него ответить?

Если у нас есть равенство, то мы имеем право одинаковым образом воздействовать на обе его части: правую и левую.

Например: $8 \cdot 2 = 8 \cdot ?$

Для того чтобы равенство не нарушилось, мы должны и правую часть умножить на 2.

Вспомните теперь известные вам математические действия, операции:

$+$ (плюс – сложение), $-$ (минус – вычитание),

причём сложение и вычитание – взаимно обратные действия;

$\times$ (умножение) и обратное ему : (деление);

$(...)^n$ (возведение в степень)

и $\sqrt[n]{\ldots}$ (извлечение корня той же степени);

потенцирование и логарифмирование;

дифференцирование и интегрирование и т.д.

Итак, у всякого математического действия существует обратное ему, противоположное по оказываемому действию. Но вот беда (а может быть, и счастье), математические действия можно применять не во всех ситуациях, условиях.

Сможете ли вы поймать 1 кг ваты, сброшенной на вас с высоты 1 метр? А 2 кг ваты? А если это будет 100 кг или 1000 кг...? В последних случаях вы, скорее всего, поспешите ИЗБАВИТЬСЯ от неприятности быть раздавленным.

Так и с математическими операциями: где-то и когда-то можно применять, а где-то может и «раздавить» всё, что вы перед этим делали с примером, задачей. Важно знать границы применения математических действий или ограничения на их применение.

Напишите известные вам ограничения на применение тех или иных математических действий (операций) (табл. 1).

Таблица 1

Таблица ограничений применения математических действий в ситуации равенства $\Delta = \Delta$

Операции	+	–	×	:	$(\ldots)^{2n}$	$(\ldots)^{2n+1}$	$\sqrt[2n]{\ldots}$	$\sqrt[2n+1]{\ldots}$
Ограни-чение	нет	нет	нет	нельзя делить на «0»	$\overset{-}{+}\Delta = \overset{-}{+}\Delta$ одного знака	нет	подкоренное выражение неотрицательно	нет

Как мы видим, в этой таблице пока всего три ограничения и их важно помнить. Их нужно знать точно так же, как вы помните о том, что во время нарезки хлеба желательно убедиться, что под ножом нет пальцев.

Итак, в море математики равенство – эта та лодка, в которой мы хотим плыть, и мы знаем, как её загружать: равномерно с обеих сторон. Пусть эта лодка для примера выглядит так: $\boldsymbol{x = 4}$. Начнём её загружать.

1. Нам нужно погрузить на борт множитель «2».

Получим: $2 \cdot x = 4 \cdot 2$.

2. На берегу есть ещё число 3, которое нужно добавить на лодку.

Получим: $2x + 3 = 8 + 3$.

3. Итак, наша лодка $2x + 3 = 11$ оправилась в нужный пункт назначения.

Мы приплыли, теперь нам необходимо произвести разгрузку лодки. *С чего бы вы начали?*

Ну, конечно же, **с первого вопроса**: ЧТО ЭТО? *Вдруг за время плавания что-то произошло с грузом. Нужно быть абсолютно уверенным в том, что перед нами.*

Это линейное уравнение *(ответьте почему)*.

Так как выполняются три условия:

1) это равенство;

2) оно содержит переменную;

3) переменная имеет первую степень.

Второй вопрос: ЧТО Я ХОЧУ?

Я хочу найти x, т.е. $x = \mathbf{4}$.

Третий вопрос: ЧТО МЕШАЕТ?

Мешают числа, воздействующие на x, и незнание последовательности этого воздействия (т.е. последовательности загрузки лодки).

Четвёртый вопрос: Что надо сделать, чтобы ИЗБАВИТЬСЯ от того, что мешает?

Для этого нужно:

1) установить последовательность воздействий на x числами (последовательность загрузки лодки);

2) определить математические действия (операции), с помощью которых осуществлялось это воздействие;

3) избавиться от мешающих чисел с помощью обратных математических действий (операций), воздействуя одновременно на обе части равенства (убираем сразу одно и то же с двух концов лодки, не нарушая при этом её равновесия).

Пятый вопрос: КАК ЭТО СДЕЛАТЬ?

Мы рекомендуем сделать это так:

$$\textcircled{1}\ \overbrace{\underbrace{2\,x}_{\times} + 3}^{+\ \textcircled{2}} = 11$$

Число 2 воздействует на «***x***» операцией умножения, а к полученному произведению прибавляется число 3. Для того чтобы избавиться от «мешающих» чисел, будем одновременно воздействовать на обе части равенства этими числами с помощью обратных операций и в последовательности, обратной найденной.

Избавимся (от того, что лежит на самом верху груза) от числа 3:

$$\mathbf{2x + 3 = 11,}$$

$$\mathbf{2x + 3 - 3 = 11 - 3.}$$

Теперь, избавимся от числа 2, разделив на него обе части равенства:

$$\frac{2x}{2} = \frac{8}{2},\ x = 4.$$

Получили тот результат, который хотели.

Дочитав до этих строк, кто-то из вас может воскликнуть, – вот это да! Я могу это делать и без подобных рассуждений, раз – и готово. И будете правы, есть много путей, которые ведут к цели. Одни, как скоростная трасса, и по ней можно мчаться с огромной скоростью, но вот беда, если под колеса попадётся камень, а если перед этим прошёл дождь и дорога блестит от тонкой плёнки воды, то жди беды. А ваш метод всегда работал без ошибок?

Есть методы, которые дают возможность преодолевать любые препятствия, встречающиеся на пути, а скорость – дело наживное. Побольше практики. Стоит только ответить на заданные себе пять вопросов (эти вопросы позволяют ориентироваться в любом проблемном пространстве):

1. ЧТО ЭТО? КТО ЭТО? ЧТО ЭТО ЗНАЧИТ?
2. ЧТО Я ХОЧУ?
3. ЧТО МЕШАЕТ получить то, что я хочу?
4. Что нужно сделать, чтобы ИЗБАВИТЬСЯ от того, что мешает?
5. КАК ЭТО СДЕЛАТЬ?

Пример. $4-\frac{x}{3}=2$. *Решите его, используя ВОПРОСЫ, и сверьтесь с нами.*

1. ЧТО ЭТО?
Линейное уравнение *(кстати, а что такое линейное уравнение?)*.
2. ЧТО Я ХОЧУ?
Найти x (т.е. $x = ...$).
3. ЧТО МЕШАЕТ?
Ответьте сами или посмотрите, сдвинув листок.
4. КАК ИЗБАВИТЬСЯ ОТ МЕШАЮЩИХ ЧИСЕЛ?
Посмотрите наши рассуждения на предыдущих страницах.

$$\overset{+}{}$$

$$(2)\quad 4+\frac{x}{-\mathbf{3}}\,(1)\,:\quad =2$$

5. КАК ЭТО СДЕЛАТЬ?
Последовательно воздействовать на обе части уравнения.

$$4-\frac{x}{3}=2 \quad \Leftrightarrow$$

$$4-\frac{x}{3}-4=2-4 \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{x}{-3}=-2 \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{x}{-3}(-3)=-2(-3) \quad \Leftrightarrow \quad x=6.$$

* Если вы самостоятельно ответили на поставленные вопросы и ответы совпали с нашими, то вы, можно сказать, почти поняли, как действовать. Придумайте несколько аналогичных нашему примеру заданий и решите их.

** Если вы просто читали, то имеет смысл ещё раз пройтись глазами по рассмотренному примеру, но с листочком, закрывающим ответы, и самостоятельно их получить. После того, как вам удастся это сделать чётко, хорошо и с полным пониманием того, что вы делаете (совсем не важно, на какой раз – второй или десятый – это произойдёт), вы вернётесь к *.

Метод решения, который мы рассмотрели, применим для всех линейных уравнений и неравенств, включая тригонометрические и линейные дифференциальные уравнения первого порядка, которые вы будете изучать на первом курсе института. А теперь примените этот метод к следующему заданию.

№ 1.1.1. Найдите функцию, обратную данной.

$$y=\sqrt[3]{\frac{tg^{-2}(\frac{x}{2}+3\pi)\cdot 4+sin\frac{\pi}{2}}{ln3}-6}$$

1. Что это?

Это сложная функция, зависящая от x.

2. Что я хочу?

Выразить $\boldsymbol{x}$ через $\boldsymbol{y}$.

3. Что мешает?

Числа (элементы), операции, воздействующие на $\boldsymbol{x}$ в определённой последовательности.

Определим эти числа (элементы), операции и последовательность их воздействия на x, отметив номером в скобках, начиная с 1 (первое воздействие), и т.д.

$$y=\sqrt[3^{(9)}]{\frac{tg_{(3)}^{\;-2^{(4)}}(\frac{x^{(1)}}{2}+_{(2)}3\pi)\cdot^{(5)}4+^{(6)}sin\frac{\pi}{2}}{ln3^{(7)}}-^{(8)}6}$$

4. Как избавиться?

В обратной последовательности с помощью обратных операций.

$$y^3=\frac{tg^{-2}(\frac{x}{2}+3\pi)\cdot 4+sin\frac{\pi}{2}}{ln3}-^{(8)}6$$

$$y^3+6=\frac{tg^{-2}(\frac{x}{2}+3\pi)\cdot 4+\sin\frac{\pi}{2}}{ln3^{(7)}}$$

$$(y^3+6)ln3=tg^{-2}(\frac{x}{2}+3\pi)\cdot 4+^{(6)}\ \sin\frac{\pi}{2}$$

$$(y^3+6)ln3-\sin\frac{\pi}{2}=tg^{-2}(\frac{x}{2}+3\pi)\cdot^{(5)}\ 4$$

$$\frac{(y^3+6)ln3-\sin\frac{\pi}{2}}{4}=tg^{-2(4)}(\frac{x}{2}+3\pi)$$

$$\left(\frac{(y^3+6)ln3-\sin\frac{\pi}{2}}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}=tg_{(3)}(\frac{x}{2}+3\pi)$$

$$arctg\left(\frac{(y^3+6)ln3-\sin\frac{\pi}{2}}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}=\left(\frac{x}{2}+^{(2)}\ 3\pi\right)$$

$$arctg\left(\frac{(y^3+6)ln3-\sin\frac{\pi}{2}}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}-3\pi=\frac{x}{2}\quad(1)$$

$$\left(arctg\left(\frac{(y^3+6)ln3-\sin\frac{\pi}{2}}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}-3\pi\right)\cdot 2=x$$

А теперь повторите процесс, но в обратную сторону.

Выразите y через x.

<u>Маленькое отступление.</u> После каждого рассмотренного метода мы будем предлагать вам задания для самостоятельной работы.

Приступать к ним имеет смысл только после того, как задания, разобранные нами, вы повторите самостоятельно (не подсматривая) столько раз, сколько вам понадобится, чтобы выполнить их безошибочно, понимая каждый шаг, который вы совершаете при решении задания.

Задания для самостоятельного решения

1) Выразить $\boldsymbol{x}$ через $\boldsymbol{y}$ и для проверки правильности решения y через x.

а) $\left(\dfrac{x}{2}+3\pi\right)=y$; б) $y=-\left(4x-\dfrac{\pi}{2}\right)$.

2) Придумайте ещё 2 примера и решите их.

Отработка этих заданий позволит вам легко брать производные от сложных функций. Тренируйтесь правильно решать любые линейные уравнения, включая уравнения и неравенства с параметрами.

Кстати, о них. Решите уравнение.

№ 1.1.2. Решите уравнение $3x + 4 = (5x - 1) - (2x - 5)$.

Если вы получили в качестве ответа $x \in$ R или $x \in (-\infty\ ;\ \infty)$, поздравьте себя. Если нет, проверьте решение и найдите ошибки.

$3x + 4 = 5x - 1 - 2x + 5$.

Может быть, у вас проблема с раскрытием скобок?

Потренируйтесь.

$-(2x - 5) = -1(2x - 5) = -1 \cdot 2x - 5 \cdot (-1) = -2x + 5$.

Придумайте столько примеров, сколько вам понадобится, чтобы отработать принципы раскрытия скобок:

$$\Delta(\square + \nabla) = \Delta \cdot \square + \Delta \cdot \nabla;$$

$$(\Delta + \mathrm{O}) \cdot (\square + \nabla) = \Delta \cdot \square + \Delta \cdot \nabla + \mathrm{O} \cdot \square + \mathrm{O} \cdot \nabla,$$

где Δ; $\square$; ∇; O – любые числа и выражения.

$3x + 4 = 3x + 4$.

На этом этапе решения вы уже можете сказать, что при любом значении x обе части равенства примут одинаковые значения, т.е. $x \in$ R.

Или $3x - 3x + 4 - 4 = 0$;

$x(3 - 3) = 0 \Leftrightarrow x \cdot 0 = 0$.

При любом значении x левая часть равенства принимает значение, равное нулю, т.е. $x \in \mathrm{R}$.

№ 1.1.3. Решите уравнение $3x + 4 = (5x - 1) + 2(2 - x)$.

После преобразований вы должны получить $x \in \varnothing$. Проверьте.

$3x + 4 = 5x - 1 + 4 - 2\boldsymbol{x}$;

$3x + 4 = 3x + 3$;

$3x - 3x = 3 - 4$;

$x \cdot 0 = -1$.

Не найдётся такого значения x, которое при умножении на число 0 даёт «-1», следовательно, $x \in \varnothing$.

Ответ. $\varnothing$.

Запомните:

$$\boldsymbol{x \cdot 0 = 0 \Rightarrow x \in \mathrm{R}}.$$

$$\boldsymbol{x \cdot 0 = m}, \text{ где } \boldsymbol{m \neq 0 \Rightarrow x \in \varnothing}.$$

1.2. Линейные уравнения с параметром

№ 1.2.1. Решить уравнение: $a \cdot x = a^2$.

Ни в коем случае не сдвигайте лист, пока не найдете решение. Учтите, для этого вам понадобятся ваша эрудиция и знания.

Мы думаем, что вы достаточно потратили времени на самостоятельное решение, а теперь аккуратно сдвигайте лист и следуйте за нами. Если вы в какой-то момент поймёте, что можете решить по-другому, чем сделали ранее, остановите движение листа. Проделайте самостоятельные рассуждения и вновь добивайтесь результата. Продолжайте следить за тем, как это делаем мы.

1. Что это?

Это линейное уравнение с параметром, где a – некоторое неизвестное число.

2. Что я хочу?

Найти x. $x = \ldots$

3. Что мешает?

Мешает a.

4. Как избавиться от a?

Обе части равенства разделить на a (*Внимание!*).

Операция деления имеет ограничения, так как про переменную a ничего не сказано, значит, она может принимать значение, равное нулю.

Таким образом, существует НЕОПРЕДЕЛЁННОСТЬ.

Как избавиться от НЕОПРЕДЕЛЁННОСТИ? Раскроем её с помощью ограничений.

Пусть в первом случае $a = 0$, во втором $a \neq 0$.

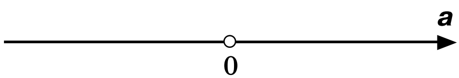
$$a \cdot x = a^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1.\ a = 0 \Leftrightarrow 0 \cdot x = 0 \Leftrightarrow x \in \mathrm{R} \\ 2.\ a \neq 0 \Leftrightarrow \dfrac{a \cdot x}{a} = \dfrac{a^2}{a} \Leftrightarrow x = a \end{array} \right.$$

Решить уравнение с параметром, если заранее не оговорены условия взаимосвязи между параметром и переменной, означает, что необходимо для всех значений параметра найти соответствующие значения переменной, удовлетворяющие уравнению.

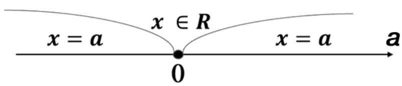
Как это сделать?

Изобразим прямую решений.

Нанесем на неё ограничения для a.



Для всех значений a отметим соответствующие им значения x.



Ответ. $x = a$ при $a \in (-\infty\ ; 0) \cup (0\ ;+\infty)$; $x \in R$ при $a = 0$.

№ 1.2.2. Решите уравнение: $(a - 2)x = a^2 - 4$.

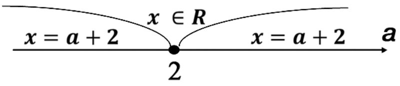
Для того чтобы найти x, надо обе части разделить на $(a - 2)$.

Выражение $(a - 2)$ НЕОПРЕДЕЛЁННО относительно 0 (нуля). Для снятия этой НЕОПРЕДЕЛЁННОСТИ введём ограничения:

$(a - 2) \cdot x = a^2 - 4 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1.\ a - 2 = 0 \Leftrightarrow a = 2 \Leftrightarrow 0 \cdot x = 0 \Leftrightarrow x \in R; \\ 2.\ a - 2 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 2 \Leftrightarrow \dfrac{(a-2) \cdot x}{a - 2} = \dfrac{a^2 - 4}{a - 2} \Leftrightarrow x = a + 2. \end{array} \right.$$

Построим прямую решений.



Ответ. $x = a + 2$ при $a \in (-\infty ;2) \cup (2; +\infty)$; $x \in \mathrm{R}$ при $a = 2$.

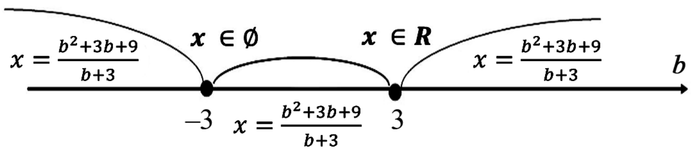
№ 1.2.3. Решите уравнение $(b^2 - 9)\,x = b^3 - 27$.

После того как вы найдёте ответ, сверьтесь с решением, предлагаемым ниже.

Есть НЕОПРЕДЕЛЁННОСТЬ относительно выражения $b^2 - 9$, связанная с его возможным равенством нулю.

$$b^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow (b - 3) \cdot (b + 3) = 0,$$
$$(b^2 - 9)\,x = b^3 - 27,$$

$$\left[\begin{array}{l} 1.\ b-3=0 \Rightarrow b=3 \Rightarrow 0\cdot x=0 \Rightarrow x\in R; \\ 2.\ b+3=0 \Rightarrow b=-3 \Rightarrow 0\cdot x=-54 \Rightarrow x\in \varnothing; \\ 3.\ b\neq 3;\ b\neq -3 \Rightarrow \dfrac{(b^2-9)\cdot x}{b^2-9}=\dfrac{b^3-27}{b^2-9} \Rightarrow x=\dfrac{b^2+3b+9}{b+3}. \end{array}\right.$$



Ответ. $x = \dfrac{b^2 + 3b + 9}{b + 3}$ при $b \in (-\infty;\ -3) \cup (-3;\ 3) \cup (3;\ +\infty)$; $x \in \varnothing$ при $b = -3$; $x \in \mathrm{R}$ при $b = 3$.

Задания для самостоятельного решения

Решите уравнения:

1) $(1 - b)x = 1 - b^2$;
2) $(b^2 - 7b + 12)x = b^2 - 6b + 9$;
3) $\dfrac{x}{-b + 2} = b$.

Мы надеемся, что вы благополучно миновали это зыбкое для многих место и вынесли чёткое представление о том, что же нужно делать, когда на пути появляются линейные уравнения с параметром.

Во-первых, вы чётко отвечаете на вопросы ориентации в проблемном пространстве и очень бдительны к тому, чтобы всё было ясно и определённо.

Во-вторых, как только возникает нечто НЕОПРЕДЕЛЁННОЕ, вы избавляетесь от него с помощью ограничений, делая всё абсолютно определённым.

1.3. Линейные неравенства

$2 < 3$.

Что это?

Теперь, подглядывая на с. 11, повторите все рассуждения, как в случае равенства, слово в слово, смысл в смысл и отметьте для себя, в чём же будут отличия.

После того, как вы провели рассуждения о том, что можно делать с неравенством, выпишите отдельно ограничения (табл. 2).

Таблица 2

Таблица ограничений применения математических действий в ситуации неравенства $\Delta \vee \Delta$

<table>
<tr><th>Операции</th><th>$+$</th><th>$-$</th><th>$\times$</th><th>$:$</th><th>$(\ldots)^{2n}$</th><th>$(\ldots)^{2n+1}$</th><th>$\sqrt[2n]{\ldots}$</th><th>$\sqrt[2n+1]{\ldots}$</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Ограничение</td><td rowspan="2">нет</td><td rowspan="2">нет</td><td colspan="2">на
$\boldsymbol{a > 0 \Rightarrow \Delta \vee \Delta}$
знак неравенства сохраняется

$\boldsymbol{a < 0 \Rightarrow \Delta \wedge \Delta}$
знак неравенства меняется на противоположный</td><td rowspan="2">$\overset{+}{\Delta} \vee \overset{+}{\Delta}$</td><td rowspan="2">нет</td><td rowspan="2">$\overset{+}{\Delta} \vee \overset{+}{\Delta}$</td><td rowspan="2">нет</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\boldsymbol{a \neq 0}$</td></tr>
</table>

№ 1.3.1. Решите самостоятельно и проверьте правильность решения.

1) $7x > 3$; 2) $-4x > 5$; 3) $5x + 6 \leq 3x - 8$; 4) $\dfrac{x}{2} + 1 < \dfrac{x}{\sqrt{3}} + \dfrac{1}{2}$.

Сравните ваше решение с нашим (табл.).

№	1) $7x > 3$	2) $-4x > 5$	3) $5x + 6 \le 3x - 8$
1.	$\frac{7x}{7} > \frac{3}{7}$	$\frac{-4x}{-4} < \frac{5}{-4}$	$5x+6-6 \le 3x-8-6;$ $5x-3x \le 3x-14-3x$
2.	$x > \frac{3}{7}$	$x < -\frac{5}{4}$	$2x \le -14;$ $x \le -7$
3.	Ответ. $x \in \left(\frac{3}{7}; +\infty\right)$.	Ответ. $x \in \left(-\infty; -\frac{5}{4}\right)$.	Ответ. $x \in (-\infty; -7]$.

№	4) $\frac{x}{2} + 1 < \frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2}$
1.	$\frac{x}{2} - \frac{x}{\sqrt{3}} < -1 + \frac{1}{2}$
2.	$x\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) < -\frac{1}{2}$
3.	$x\left(\frac{\sqrt{3}-2}{2\sqrt{3}}\right) < -\frac{1}{2}$
4.	Так как $\sqrt{3} - 2 < 0$, то $x > -\frac{1}{2}\left(\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}-2}\right)$
5.	Умножим числитель и знаменатель на выражение, сопряжённое знаменателю $x > \frac{\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} \bullet \left(\frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right) \Leftrightarrow x > \frac{\sqrt{3}\left(2+\sqrt{3}\right)}{\left(2-\sqrt{3}\right)\bullet\left(2+\sqrt{3}\right)}$.
6.	$x > \frac{\sqrt{3}\left(2+\sqrt{3}\right)}{4-3} \Leftrightarrow x > \sqrt{3}\left(2+\sqrt{3}\right) \Leftrightarrow x > 3 + 2\sqrt{3}$
7.	Ответ. $x \in \left(3 + 2\sqrt{3}; +\infty\right)$.

Задание для самостоятельного решения

Придумайте по 3 примера на каждый случай.

1.4. Линейные неравенства с параметром

№ 1.4.1. Решите неравенство $\boldsymbol{ax} \le 1$.

1. Что это?

Линейное неравенство с параметром.

2. Что я хочу?

Найти x. $x \le \ldots$ или $x \ge \ldots$.

3. Что мешает?

Мешает a.

4. Как избавиться от a?

Для того чтобы избавиться от a в левой части, нужно обе части неравенства разделить на a.

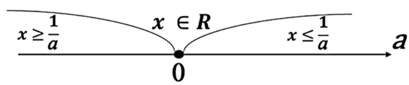
Имеем ли мы право на это? Нет. Есть НЕОПРЕДЕЛЁННОСТЬ, так как нам неизвестен знак a и неизвестно, равен ли он нулю.

Введём ограничения.

1. $ax \le 1$ и $a = 0$, т.е. $0x \le 1 \Leftrightarrow x \in \mathrm{R}$ или $x \in (-\infty; +\infty)$.

2. $ax \le 1$ и $a \ne 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x \ge \dfrac{1}{a} & \text{при } a < 0; \\ x \le \dfrac{1}{a} & \text{при } a > 0. \end{array}\right.$

Построим прямую решений.



Ответ. 1. $x \ge \dfrac{1}{a}$ при $a \in (-\infty; 0)$;

2. $x \le \dfrac{1}{a}$ при $a \in (0\,; +\infty\,)$;

3. $a \in \mathrm{R}$ при $a = 0$.

Вы, конечно, помните, что самостоятельно решать задания нужно только после того, как вы безошибочно сможете повторить рассуждения по рассмотренному примеру.

Задания для самостоятельного решения

1) $bx > -1$; 2) $(b - 3)\,x < 2$; 3) $(4 - a)\,x \ge 3$; 4) $(b^2 + 1)\,x \ge -1$.

1.5. Система линейных неравенств

Обратите внимание, что фигурная непарная скобка «{» используется для представления систем уравнений, неравенств и означает, что решением системы являются общие решения каждого из уравнений или неравенств (т.е. пересечение множеств решений), а квадратная непарная скобка «[» используется для представления совокупности уравнений, неравенств и означает, что её решением являются все решения каждого из уравнений или неравенств (т.е. объединение множества всех решений).

Мир суров, и часто, когда вы продираетесь сквозь джунгли и болота, на вас нападает не один зверь, а сразу несколько, а вы должны суметь им дать достойный отпор.

Решите неравенство: $3x > 1$. Это просто! $x > \frac{1}{3}$.

Теперь решите другое неравенство:
$-x < 3$;
$(-1) \cdot (-x) > (-1) \cdot 3$;
$x > -3$.

А если они вместе? Вспомним, что значит решить систему.

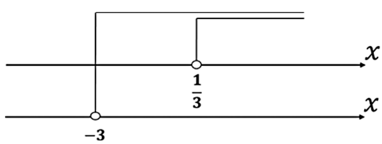
Решить систему неравенств – это значит, что нужно найти такие значения переменных, которые будут одновременно удовлетворять каждому из составляющих её неравенств.

$$\begin{cases} 3x > 1, \\ -x < 3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{3}, \\ x > -3. \end{cases}$$

Кстати, если у вас только один выстрел и два зверя, можно ли их поразить одним выстрелом?

Догадались? Да, когда они одновременно будут на линии выстрела.

$$\begin{cases} x > \frac{1}{3}, \\ x > -3. \end{cases}$$



Начиная стрелять с $\frac{1}{3}$ и до ∞, вы обязательно попадёте в них сразу в любой выбранной точке. Во всех остальных случаях попадёте только в одного или они разбегутся от звука вашего выстрела.

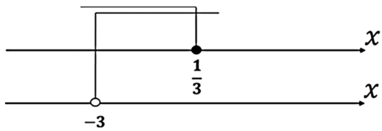
Счастливой охоты!

№ 1.5.1. Решите систему линейных неравенств:

1. $\begin{cases} 3x \le 1, \\ -x < 3. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} 3x > 1, \\ -x > 3. \end{cases}$

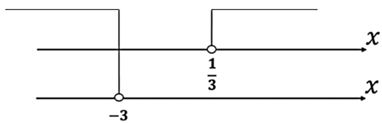
Сначала, как обычно, решаете сами, а потом сверитесь с нами.

$$\begin{cases} 3x \le 1, \\ -x < 3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le \dfrac{1}{3}, \\ x > -3. \end{cases}$$



Ответ. $x \in \left(-3; \frac{1}{3}\right]$.

2. $\begin{cases} 3x > 1, \\ -x > 3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \dfrac{1}{3}, \\ x < -3. \end{cases}$



Ответ. $x \in \varnothing$.

В этом случае либо вы этих зверей не интересуете, либо вас окружают. Но независимо ни от чего держите оружие наготове.

Задания для самостоятельного решения

Решите системы неравенств:

1) $\begin{cases} -x < 1, \\ 2x + 1 \le 5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x < \pi, \\ -2x > -3,2; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 3x + 2 \ge 0, \\ x + \sqrt{5} < 0. \end{cases}$

А сейчас спокойствие, собранность и аккуратность с НЕОПРЕДЕЛЁННОСТЬЮ, ведь у вас только три заряда в оружии.

№ 1.5.2. Решить систему линейных неравенств с параметром $\begin{cases} 2x > 1, \\ ax < 2. \end{cases}$ Когда израсходуете заряды, сдвиньте лист и убедитесь, что вы вышли победителем из этой схватки. Помните, что вы всегда можете посмотреть на то, что позади вас, набраться там сил и опыта для того, чтобы справиться со всем тем, что встречается на вашем пути.

А теперь сравните.

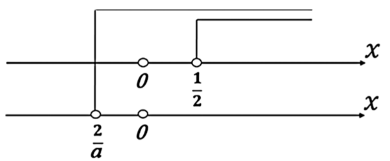
$$\begin{cases} 2x>1, \\ ax<2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>\dfrac{1}{2}; \\ \left[\begin{array}{l} a=0;\ 0\cdot x<2; \\ a<0;\ x>\dfrac{2}{a}; \\ a>0;\ x<\dfrac{2}{a}; \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>\dfrac{1}{2}; \\ \left[\begin{array}{l} a=0;\ x\in R; \\ a<0;\ x>\dfrac{2}{a}; \\ a>0;\ x<\dfrac{2}{a}. \end{array}\right. \end{cases}$$

Рассмотрим последовательно три системы с учётом первого неравенства и каждого из неравенств совокупности.

1. $\begin{cases} x>\dfrac{1}{2}, \\ a=0; x\in R; \end{cases} \Leftrightarrow x\in\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right).$

Ответ 1. $x\in\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$ при $a=0$.

2. $\begin{cases} x>\dfrac{1}{2}, \\ a<0; x>\dfrac{2}{a}. \end{cases}$ Так как $a<0$, то $x=\dfrac{2}{a}$ принимает отрицательные значения.



Ответ 2. $x\in\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$ при $a<0$.

3. $\begin{cases} x>\dfrac{1}{2}; \\ a>0; x<\dfrac{2}{a}. \end{cases}$

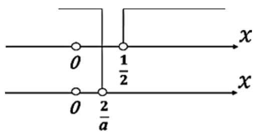
Так как $a > 0$, то $x = \frac{2}{a}$ принимает положительные значения. Здесь существует неопределённость относительно того, где будет располагаться значение $\frac{2}{a}$: до $\frac{1}{2}$, после неё или они совпадут.

Введём ограничения:

$$1)\ \frac{2}{a} \le \frac{1}{2};\ a \ge 4 \qquad 2)\ \frac{2}{a} > \frac{1}{2};\ a < 4$$

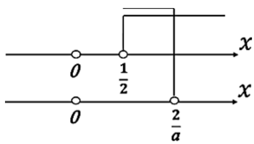
Таким образом, получим две системы:

$$1)\begin{cases} x > \frac{1}{2}; \\ a \ge 4; x < \frac{2}{a} \end{cases}$$



$x \in \varnothing$ при $a \ge 4$

$$2)\begin{cases} x > \frac{1}{2}; \\ 0 < a < 4; x < \frac{2}{a} \end{cases}$$



$x \in \left(\frac{1}{2}; \frac{2}{a}\right)$ при $0 < a < 4$

Ответ. 1. $x \in \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$ при $a \in (-\infty; 0]$.

2. $x \in \left(\frac{1}{2}; \frac{2}{a}\right)$ при $a \in (0; 4)$.

3. $x \in \varnothing$ при $a \in [4; +\infty)$.

Задания для самостоятельного решения

1) $\begin{cases} 2x - 4 > -5(3 - x), \\ \frac{x}{2} + 4 \le 7 - x; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} (a - 3)x \ge 2, \\ -5x > 15; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} b + x < 2, \\ 2x > 1. \end{cases}$

1.6. Линейные уравнения с модулем

Как вы уже могли заметить, мы удалились на некоторое расстояние от того места, где высадились из лодки и произвели её разгрузку. Мы познакомились с некоторыми тайнами разгрузки, такими как НЕОПРЕДЕЛЁННОСТЬ и ограничения, а также научились управлять ими, достигая желаемых результатов.

Давайте познакомимся ещё с одним представителем загруженной лодки – МОДУЛЕМ $|U|$. О нём известно, что он очень положителен, в крайнем случае равен нулю.

Собственно говоря, он всегда неотрицателен, когда смотришь на него в целом. Если вы смотрите на панцирь спрятавшейся черепахи, такой круглый и аккуратный, у вас очень мало шансов понять, какая же черепаха на самом деле, и только тогда, когда она высунется из своего дома, можно будет что-либо о ней сказать. Но и до того, как мы её увидим, всегда можно сделать какие-либо предположения о том, что там внутри.

Так и с модулем, в целом он положителен (в крайнем случае, равен нулю), а внутри НЕОПРЕДЕЛЁННОСТЬ, которая связана со знаком выражения, стоящего под знаком модуля.

$$|U| = \left[\begin{array}{ll} U, \text{ если } U \geq 0, & (1) \\ -U, \text{ если } U < 0. & (2) \end{array}\right.$$

Как вы думаете, какой знак имеет U в выражении (1), а «$-U$» в (2)?

Некоторые люди, обычно молодые, говорят, что в (2) «$-U$» имеет отрицательное значение.

Но мы с вами знаем, что МОДУЛЬ всегда неотрицателен. И действительно, «$-U$», если $U < 0$, принимает положительное значение (так как $U < 0$, а добавив ещё минус, получим, что $-U > 0$).

Итак, у нас есть первая возможность избавиться от модуля – по определению.

И пусть нам встретилось уравнение типа.

№ 1.6.1. $|x - 1| = 3$.

1. Что это?

Это линейное уравнение с модулем. Кстати, почему?

2. Что я хочу?

Найти x.

3. Что мешает?

Мне мешает модуль.

4. Как избавиться от модуля?

По определению.

$$|x-1|=3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-1\ge 0, \\ x-1=3; \end{cases} \\ \begin{cases} x-1<0, \\ -(x-1)=3; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\ge 1, \\ x=4; \end{cases} \\ \begin{cases} x<1, \\ x=-2. \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ. $x\in\{-2;4\}$.

Задания для самостоятельного решения

Решите уравнения.

1) $|2x-4|=7$; 2) $\left|3-\frac{x}{3}\right|=4$; 3) $|11-4x|=-1$.

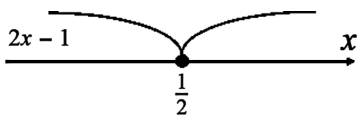
Не правда ли, это просто, особенно когда в уравнении один модуль. Один модуль тянет за собой две системы. Интересно, а если в уравнении два модуля, то систем будет ... Кстати, сколько же их будет? Теперь можете свериться. Да, их будет четыре. А если три модуля, то шесть. Это уже много. Как же быть?

№ 1.6.2. Решите уравнение $|2\boldsymbol{x}-1|=|-\boldsymbol{x}+3|$.

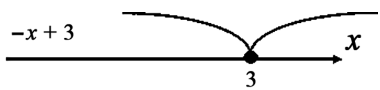
1. Выясним, при каких значениях x выражения, стоящие под модулем, положительны, а при каких отрицательны.

а) Определим значения x, при которых эти выражения равны 0, и отметим их на числовой прямой.

$$2x-1=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$$



$$-x+3=0 \Leftrightarrow x=3$$

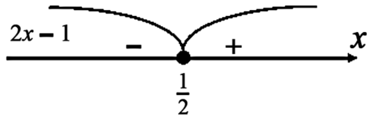


б) Определим знаки выражений на полученных интервалах.

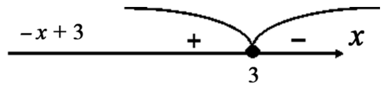
Пусть $\boldsymbol{x}$ = 1 000000, тогда выражение $(2x-1)$ положительно, а $(-x+3)$ отрицательно.

При $x = -1\,000000$ выражение $(2x - 1)$ отрицательно, а $(-x + 3)$ положительно. Итак, мы получили три интервала, на которых выражения могут принимать следующие знаки.

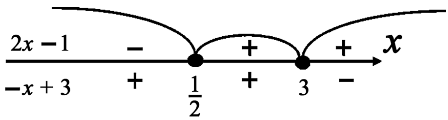
$$2x-1=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$$



$$-x+3=0 \Leftrightarrow x=3$$



в) Отметим все полученные сведения на одной числовой прямой.



г) Введём ограничения и раскроем модули по определению.

I	II	III
$\begin{cases} x<\frac{1}{2}, \\ -(2x-1)=-x+3; \end{cases}$	$\begin{cases} \frac{1}{2}\le x<3, \\ 2x-1=-x+3; \end{cases}$	$\begin{cases} x\ge 3, \\ 2x-1=-(-x+3); \end{cases}$
$\begin{cases} x<\frac{1}{2}, \\ -2x+1=-x+3; \end{cases}$	$\begin{cases} \frac{1}{2}\le x<3, \\ 3x=4; \end{cases}$	$\begin{cases} x\ge 3, \\ 2x-1=x-3; \end{cases}$
$\begin{cases} x<\frac{1}{2}, \\ -x=2; \end{cases}$	$\begin{cases} \frac{1}{2}\le x<3, \\ x=\frac{4}{3}; \end{cases}$	$\begin{cases} x\ge 3, \\ x=-2; \end{cases}$
$x=-2$	$x=\frac{4}{3}$	$x\in\varnothing$

Ответ. $\left\{-2; \frac{4}{3}\right\}$.

Как видите, нам понадобилось только три системы вместо четырёх. Таким образом, мы продемонстрировали II метод избавления от модуля – **метод интервалов**.

Возьмите задание № 1.6.1 и оформите его решение кратко, а затем ещё раз сверьтесь с нашим вариантом.

Задания для самостоятельного решения

Решите уравнения.

1) $|x-4| = |7+x|$; 2) $|5-2x| + |3+x| = 1$; 3) $|x-1| - |x+4| = 2$.

Вы, наверное, обратили внимание, что второй способ – просто модернизация первого. Мы идём тем же путём (изнутри модуля), накладывая ограничения на знак входящего в него выражения, сравнивая его с нулём.

Представьте, что вы находитесь в жаркой местности. Вас мучает жажда и у вас в руках кокос. Конечно, вы можете поразмышлять о том, что находится у него внутри, и можно ли это съесть. Но гораздо более практичным будет расколоть плод и сразу же утолить голод и жажду.

Возведение модуля в квадрат даст нам возможность быстро решить уравнение рассматриваемого вида.

$$|2x-1| = |-x+3|.$$

Убедимся, что мы имеем право возвести обе части уравнения в квадрат.

Обе части уравнения неотрицательны. Отметим это, поставив знак «+» над ними (нам это обозначение пригодится в дальнейшем), следовательно, имеем право возвести обе его части в квадрат.

$|2x-1|^{+} = |-x+3|^{+}$;

$(2x-1)^2 = (-x+3)^2 \Leftrightarrow (2x-1)^2 - (-x+3)^2 = 0.$

После возведения в квадрат обеих частей уравнения ВСЕГДА пользуйтесь ФОРМУЛОЙ РАЗНОСТИ КВАДРАТОВ.

$\big((2x-1)-(-x+3)\big)\cdot\big((2x-1)+(-x+3)\big) = 0$;

$$(3x-4)\cdot(x+2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x-4=0, \\ x+2=0; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{4}{3}; \\ x=-2. \end{array}\right.$$

Ответ. $\left\{-2; \dfrac{4}{3}\right\}$.

Как вы считаете, третий метод избавления от модуля (**возведение в квадрат**) проще, чем первый и второй?

№ 1.6.3. Решите уравнение $|x-4| = 3x+1$.

1. Что это?

Интересно, как вы ответили на этот вопрос?

Если линейное уравнение с модулем, то …

Давайте проанализируем: линейное уравнение – это равенство, содержащее переменную в первой степени.

Да, знак равенства есть, переменные тоже есть, но слева стоит выражение, принимающее только неотрицательные значения, а в правой части мы имеем НЕОПРЕДЕЛЁННОСТЬ относительно знака (выражение может принимать и положительные, и отрицательные значения).

Но ведь это равенство, следовательно, необходимо ввести ограничения, избавляющие нас от НЕОПРЕДЕЛЁННОСТИ, т.е. $3x+1 \geq 0$.

Итак, $|x-4|^{+} = (3x+1)^{\pm}$.

С учётом ограничения получим,

$$\begin{cases} 3x+1 \geq 0, \\ (x-4)^2 = (3x+1)^2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\dfrac{1}{3}, \\ (x-4+3x+1)(x-4-3x-1) = 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\dfrac{1}{3}, \\ (4x-3)(-2x-5) = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\dfrac{1}{3}, \\ \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{3}{4}, \\ x = -\dfrac{5}{2}; \end{array} \right. \end{cases} \Rightarrow x = \dfrac{3}{4}.$$

Ответ. $\left\{\dfrac{3}{4}\right\}$.

Задания для самостоятельного решения

Решите уравнения.

1) $|6-2x| = x-4$; 2) $|15+x|-4=2x$; 3) $\left|3+\dfrac{x}{2}\right|-x=1$.

Мы подошли к интересному рубежу. У нас есть три метода избавления от модуля. Но вот когда какой применять? Подумайте об этом.

Третий метод (возведение в квадрат обеих частей уравнения) можно использовать, когда уравнение имеет вид:

$$|\Delta| = |\square|;$$

$$|\Delta| = \square.$$

Второй метод (по определению с учётом метода интервалов), используется в уравнениях следующего вида:

$$|\Delta| + |\square| = \nabla;$$

$$|\Delta| + |\square| = |\nabla|;$$

$$|\Delta| + |\square| + |\nabla| = \clubsuit.$$

Первый метод (по определению) применяют, когда очень захочется.

Задания для самостоятельного решения

Самостоятельно примените эти методы к линейным уравнениям с модулем.

1) $|16-x| = 14$; 2) $|3x-2| = |x+4| = 2$; 3) $|x+5|-x+1=3$.

1.7. Линейные неравенства с модулем

№ 1.7.1. Решите неравенство $|x-1| > -1$.

Вы читаете эти строки, значит ли это, что неравенство вами уже решено?

Если это так, то сверьтесь с нашим решением.

1 шаг. Определить знаки обеих частей неравенства. Если есть НЕОПРЕДЕЛЁННОСТЬ относительно знака, то раскрыть её с помощью ограничений.

$|x-1|^{+}$; -1^{-}, так как положительная величина всегда больше отрицательной, то это неравенство $|x-1|^{+} > -1^{-}$ справедливо при любом x.

Ответ. $x \in (-\infty; +\infty)$, или $x \in \mathrm{R}$.

№ 1.7.2. Решить неравенство $|4x + 1| > x$.

1. Определим знаки выражений $|4x + 1|^+ > x^\pm$.

2. Введём ограничения.

а) Пусть $x < 0$, тогда неравенство $|4x + 1|^+ > x^-$ верно при любом $x \in (-\infty; 0)$.

б) Пусть $x \geq 0$. Из этого следует, что выражение под знаком модуля принимает неотрицательные значения, т.е. по определению $4x + 1 > x$ (вывод можно сделать уже здесь).

$3x > -1$.

Таким образом, для любого $x \geq 0$ неравенство верно.

Из а) и б) следует, что $x \in (-\infty; +\infty)$.

Ответ. $(-\infty; +\infty)$.

№ 1.7.3. Решить неравенство $|2x+3| \leq 3x$.

1. $|2x+3|^+ \leq 3x^\pm$.

2. $x > 0$ (x не может быть меньше или равен 0. Почему?). Следовательно,

$2x + 3 > 0$;

$2x + 3 \leq 3x$; $x \geq 3$.

Ответ. $[3; +\infty)$.

Итак, у нас появился четвёртый метод избавления от модуля. Назовём его «избавление от модуля через исследование НЕОПРЕДЕЛЁННОСТИ».

Задания для самостоятельного решения

Решите неравенства:

1) $|4x - 2| \geq 2x$;   2) $|5x + 7| + 2x < 0$;   3) $|x + 1| \leq -4x$.

№ 1.7.4. Решить неравенство $|1 - 3x| - |x + 2| \leq 2$.

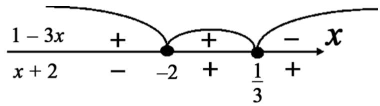
Какой из четырёх методов вы примените к этому неравенству?

Конечно, второй – по определению с использованием метода интервалов.

1. Определим знаки выражений под модулями в зависимости от возможного значения x.

$1-3x=0;\ x=\dfrac{1}{3}$

$x+2=0;\ x=-2$



2. На каждом интервале раскроем модули по определению.

$\begin{cases} x<-2, \\ 1-3x+x+2\le 2; \end{cases}$	$\begin{cases} -2\le x<\dfrac{1}{3}, \\ 1-3x-x-2\le 2; \end{cases}$	$\begin{cases} x\ge \dfrac{1}{3}, \\ -1+3x-x-2\le 2; \end{cases}$
$\begin{cases} x<-2, \\ x\ge \dfrac{1}{2}; \end{cases}$	$\begin{cases} -2\le x<\dfrac{1}{3}, \\ x\ge -\dfrac{3}{4}; \end{cases}$	$\begin{cases} x\ge \dfrac{1}{3}, \\ x\le \dfrac{5}{2}; \end{cases}$
$x\in\varnothing$	$x\in\left[-\dfrac{3}{4};\dfrac{1}{3}\right)$	$x\in\left[\dfrac{1}{3};\dfrac{5}{2}\right]$

Ответ. $\left[-\dfrac{3}{4};\dfrac{5}{2}\right]$.

Задания для самостоятельного решения

Решите неравенства:

1) $|x+2|+|x-3|>5$; 2) $|3+x|-|2-4x|\le 1$; 3) $|7-x|+|x-5|>2$.

Задания, которые расположены ниже, позволят вам определить, готовы ли вы перейти к следующей части математики или вам имеет смысл ещё поработать над тем, что может не получиться.

1. Решите уравнение $4-\dfrac{3}{2}x=-2$.

2. Выразите x через y $y=\left(\dfrac{ln^{-3}\left(\sqrt{4-2x}+\sqrt{2}\right)-6}{ctg\left(arctg\,0,7\right)}+\dfrac{1}{3}\right)^{-2}$.

3. Решите уравнение $(a-3)(a-4)x=(a-4)(a+5)$.
4. Решите уравнение $(a-2)^2x=a^2-4$.
5. Решите неравенство $3|x-4|\le x+2$.
6. Решите неравенство $|2x+1|+|1-5x|>2$.