ПОСТУПАЕМ В УНИВЕРСИТЕТ

Ю. В. Садовничий, В. В. Вещиков

ПЛАНИМЕТРИЯ

Сборник задач для абитуриентов

Москва
ИЛЕКСА
2025

УДК 372.851:514.112
ББК 22.151.0:74.202.5я721
С14

Садовничий Ю. В., Вещиков В. В.

С14 Планиметрия. Сборник задач для абитуриентов. — М.: ИЛЕКСА, 2025. — 208 с. (Серия «Поступаем в университет»).
ISBN 978-5-89237-742-3

Планиметрия является весьма важной и сложной темой при подготовке к экзамену по математике, будь то ЕГЭ или экзамен непосредственно в высшем учебном заведении.

Данная книга состоит из двух частей — в первой приводятся основные теоремы и формулы планиметрии, на основе которых решаются практически все планиметрические задачи, а во второй — чертежи к предлагаемым планиметрическим задачам.

Авторы собрали планиметрические задачи, которые предлагались на вступительных экзаменах в Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, и снабдили условия задач чертежами.

Тексты задач сопровождаются ответами, что позволяет с большей уверенностью оценивать свое решение. Задачи сгруппированы по годам поступления и внутри каждого года по факультетам, что облегчает поиск и сравнение задач разных лет.

Эта книга будет полезна как учащимся, желающим поступить в вуз, так и преподавателям математики, студентам педагогических вузов, репетиторам и всем любителям элементарной математики.

УДК 372.851:514.112
ББК 22.151.0:74.202.5я721

Учебное издание

Садовничий Ю. В., Вещиков В. В.

ПЛАНИМЕТРИЯ.
Сборник задач для абитуриентов

Подписано в печать 08.04.2024.
Формат 70×90/16. Усл. печ. л. 12,71.
Тираж 1500 экз. Заказ

ООО «Илекса»
+7(964) 534-80-01
real-ilexa@yandex.ru
www.ilexa.ru

ISBN 978-5-89237-742-3

ВВЕДЕНИЕ

Авторы много лет преподавали и преподают математику и давно убедились, что планиметрия является весьма важной и сложной темой при подготовке к экзамену по математике, будь то ЕГЭ или вступительный экзамен непосредственно в самом высшем учебном заведении.

Данная книга состоит из двух частей — в первой приводятся основные теоремы и формулы планиметрии, на основе которых решаются практически все планиметрические задачи, а во второй — чертежи к предлагаемым планиметрическим задачам.

Создание чертежа является весьма важным, а часто и решающим этапом в решении задачи. Поэтому авторы решили помочь ученикам при освоении планиметрии подсказкой-чертежом.

Авторы собрали планиметрические задачи, которые предлагались на вступительных экзаменах в Московский Государственный университет имени М. В. Ломоносова, и снабдили условия задач чертежами.

Задачи разбиты по годам поступления, а внутри каждого года — по факультетам и номерам задач в экзаменационном билете.

Практически на каждой странице представлены условия двух задач — первого и второго варианта. Задачи двух соседних вариантов обычно весьма похожи и по тексту, и по методам их решения, и такие пары задач весьма полезно иметь при подготовке к экзамену.

Тексты задач сопровождаются ответами, что позволяет с большей уверенностью оценивать своё решение.

Авторы надеются, что эта книга будет полезна как учащимся, желающим поступить в ВУЗ, так и преподавателям математики.

Желаем успеха!

Авторы.

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ПЛАНИМЕТРИИ

Треугольники

В треугольнике ABC через a, b и c мы будем обозначать стороны BC, CA и AB соответственно, а противолежащие этим сторонам углы — через α, β и γ. Высоту, выходящую из точки A, обозначим h_a, медиану — m_a, а биссектрису — l_a. Кроме того, через R обозначается радиус описанной около треугольника, а через r — радиус вписанной в треугольник окружности. Площадь треугольника обозначается буквой S, а полупериметр — буквой p.

Справедливы следующие формулы:

Теорема 1. (теорема Пифагора): В прямоугольном треугольнике сумма квадратов катетов равна квадрату гипотенузы, т. е. $c^2 = a^2 + b^2$, где c — гипотенуза треугольника.

Теорема 2. В прямоугольном треугольнике справедливы следующие соотношения:

$$a = c \cdot \cos\beta = c \cdot \sin\alpha = b \cdot \operatorname{tg}\alpha = b \cdot \operatorname{ctg}\beta \to c = \frac{a}{\cos\beta} = \frac{b}{\sin\alpha},$$

где c — гипотенуза треугольника.

Теорема 3. Если в прямоугольном треугольнике через c_a и c_b обозначить проекции катетов на гипотенузу, то

$$h^2 = c_a \cdot c_b,\ a^2 = c \cdot c_a \text{ и } b^2 = c \cdot c_b.$$

Теорема 4. (теорема косинусов): $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$.

Теорема 5. (теорема синусов): $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma} = 2R$.

Теорема 6. $l_a = \dfrac{2bc\cos\frac{a}{2}}{b + c}$.

Теорема 7. $l_a = bc - xy$; где x, y — отрезки, на которые биссектриса l_a делит сторону a.

Теорема 8. Медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся в этой точке на отрезки, длины которых относятся как 2 : 1, считая от вершины.

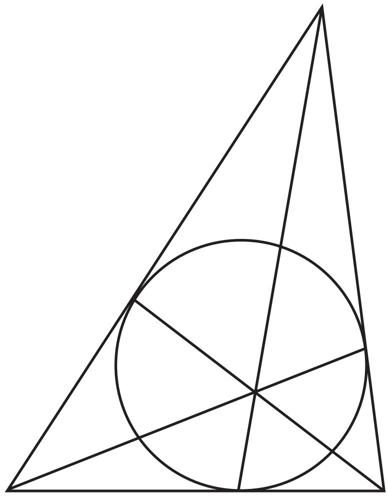
Теорема 9. $m_a = \dfrac{\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}}{2}$.

Теорема 10. $S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bc\sin\alpha = pr = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

Теорема 11. (теорема о биссектрисе внутреннего угла): Биссектриса внутреннего угла треугольника делит противоположную сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам треугольника.

Теорема 12. Около всякого треугольника можно описать окружность и притом только одну. Центр этой окружности лежит в точке пересечения серединных перпендикуляров, проведенных к сторонам. Причем этот центр лежит внутри треугольника, если он остроугольный; вне треугольника, если он тупоугольный; в середине гипотенузы, если он прямоугольный.

Теорема 13. Во всякий треугольник можно вписать окружность и притом только одну. Центр этой окружности лежит в точке пересечения биссектрис трёх углов треугольника, причем всегда внутри треугольника.



Пропорциональные отрезки

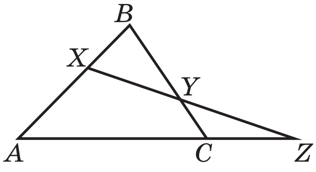
Теорема 14. (теорема Фалеса): Параллельные прямые высекают на пересекающих их прямых пропорциональные отрезки.

Определение 1. Два треугольника называются подобными, если соответствующие стороны у них пропорциональны.

Теорема 15. (первый признак подобия): Если один угол первого треугольника равен углу второго треугольника, а прилежащие к этим углам стороны треугольников пропорциональны, то такие треугольники подобны.

Теорема 16. (второй признак подобия)**:** Если два угла одного треугольника равны соответственно двум углам другого треугольника, то такие треугольники подобны.

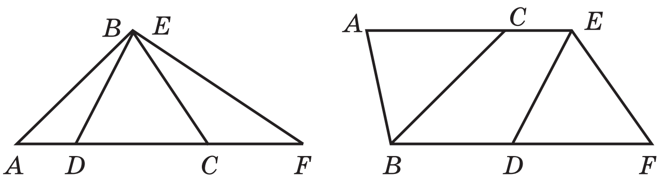
Теорема 17. (теорема Менелая)**:** Если некоторая прямая пересекает стороны AB и BC треугольника ABC в точках X и Y соответственно, а продолжение стороны AC — в точке Z, то $\frac{AX}{XB} \cdot \frac{BY}{YC} \cdot \frac{CZ}{ZA} = 1$.



Теорема 18. Пусть в остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и BB_1. Тогда треугольники A_1BC_1 и ABC подобны, причем коэффициент подобия $k = \cos\angle B$.

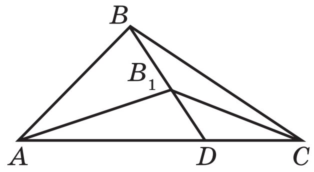
Леммы о площадях

Лемма 1. Если стороны треугольников лежат на одной прямой или на параллельных прямых, то $\frac{S_{ABC}}{S_{DEF}} = \frac{AC}{DF}$.



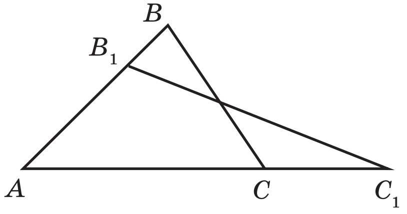
Лемма 2. Если два треугольника имеют общую сторону AC, то

$$\frac{S_{ABC}}{S_{AB_1C}} = \frac{BD}{B_1D}.$$



Лемма 3. Если треугольники ABC и AB_1C_1 имеют общий (или одинаковый) угол, то

$$\frac{S_{ABC}}{S_{AB_1C_1}} = \frac{AB \cdot AC}{AB_1 \cdot AC_1}.$$



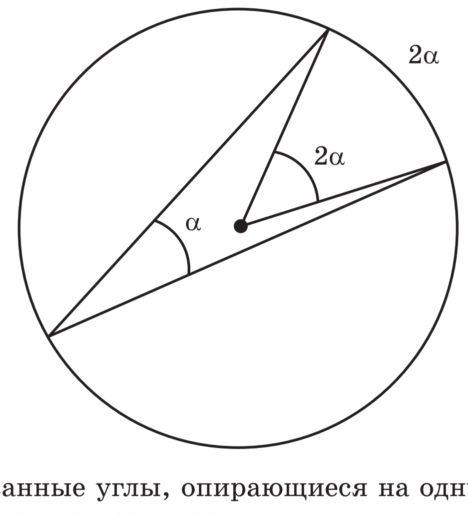
Лемма 4. Площади подобных треугольников относятся как квадраты коэффициента подобия.

Углы в окружностях

Определение 2. Угловой величиной дуги называется отношение длины этой дуги к длине окружности, умноженное на 2π.

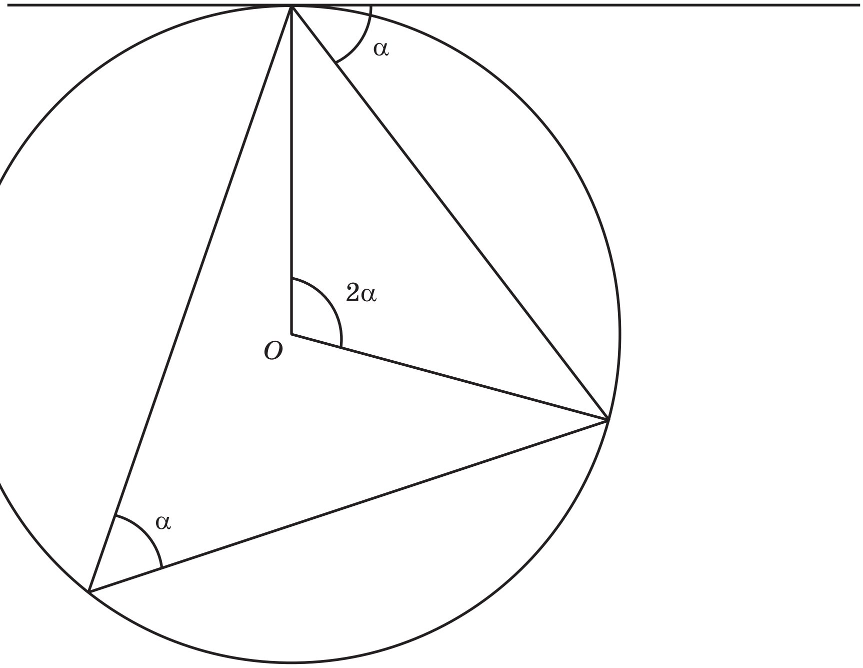
Теорема 19. Величина центрального угла равна угловой величине дуги, на которую он опирается.

Теорема 20. Величина вписанного угла равна половине угловой величины дуги, на которую он опирается.



Следствие 1. Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу или на равные дуги одной окружности, равны.

Теорема 21. Угол между касательной и хордой, выходящими из одной точки окружности, измеряется половиной угловой величины дуги, заключенной внутри этого угла.



Теорема 22. Угол, вершина которого расположена вне круга, измеряется полуразность угловых величин дуг окружности этого круга, заключенных внутри угла.

Теорема 23. Угол, вершина которого расположена внутри круга, измеряется полусуммой угловых величин дуг, которые высекают из окружности круга стороны угла и их продолжения.

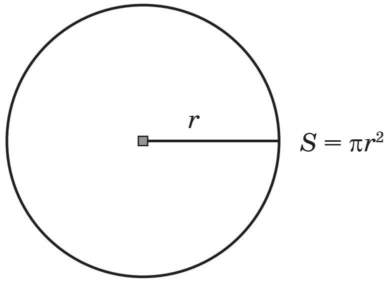
Теорема 24. Сумма противоположных углов четырехугольника, вписанного в окружность, равна π, и обратно, если сумма противоположных углов выпуклого четырехугольника равна π, то вокруг этого четырехугольника можно описать окружность.

Теорема 25. Произведения длин отрезков двух пересекающихся хорд равны.

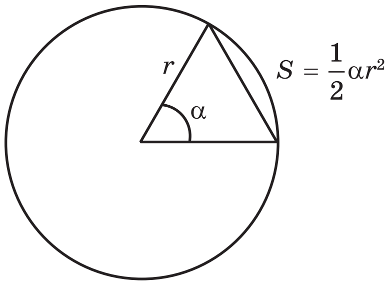
Теорема 26. Произведение длины отрезка секущей на длину ее внешней части есть величина постоянная и равна квадрату длины касательной, проведенной к окружности из той же точки.

Ещё немного об окружности

Теорема 27. Площадь круга радиуса r равна πr^2.

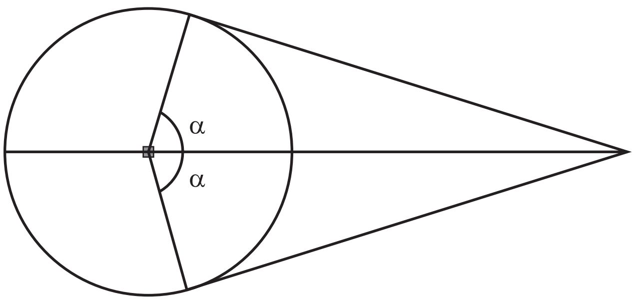


Теорема 28. Площадь сектора угловой величины α круга радиуса r равна $\frac{1}{2}\alpha r^2$.



Теорема 29. Площадь сегмента угловой величины α круга радиуса r равна $\frac{1}{2}r^2(\alpha - \sin\alpha)$.

Теорема 30. Отрезки касательных к окружности, проведенные из одной точки, равны и образует равные углы с прямой, проходящей через эту точку и центр окружности.



Теорема 31. В любом описанном четырехугольнике суммы длин противоположных сторон равны.

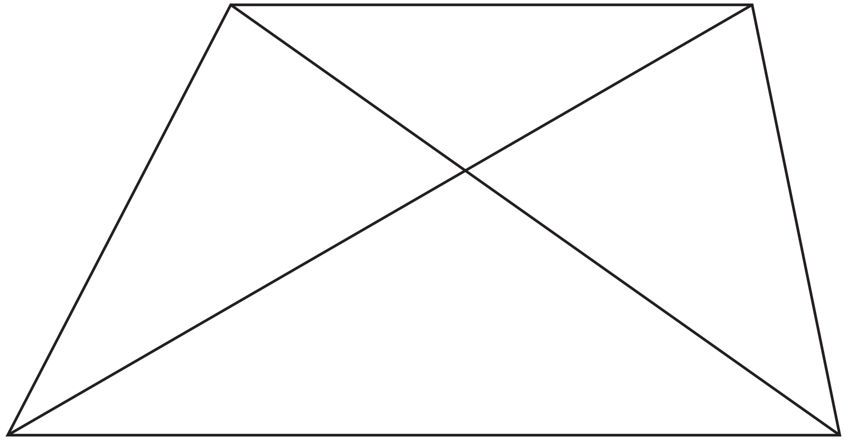
Теорема 32. В любом треугольнике расстояние от вершины треугольника до точки касания вписанной окружности со стороной треугольника, выходящей из данной вершины, есть разность полупериметра треугольника и стороны, противолежащей данной вершине.

Теорема 33. В любом треугольнике расстояние от вершины треугольника до точки касания вневписанной окружности (касающейся противоположной данной вершине стороны треугольника и продолжений двух других его сторон) с продолжением стороны треугольника, выходящей из данной вершины, есть полупериметр треугольника.

Четырёхугольники

Теорема 34. Площадь трапеции равна произведению полусуммы длин оснований на высоту.

Теорема 35. Диагонали трапеции делят ее на четыре треугольника, два из которых подобны, а два других имеют одинаковую площадь.

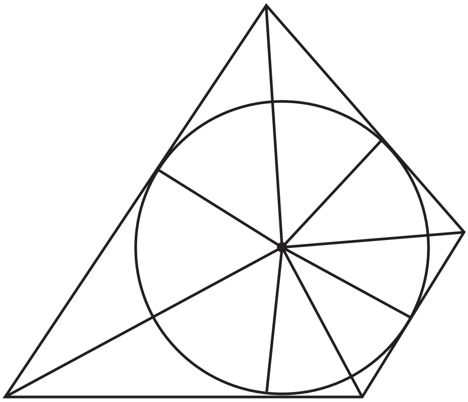


Теорема 36. Площадь параллелограмма равна произведению основания на высоту, опущенную на данное основание, или произведению двух сторон на синус угла между ними.

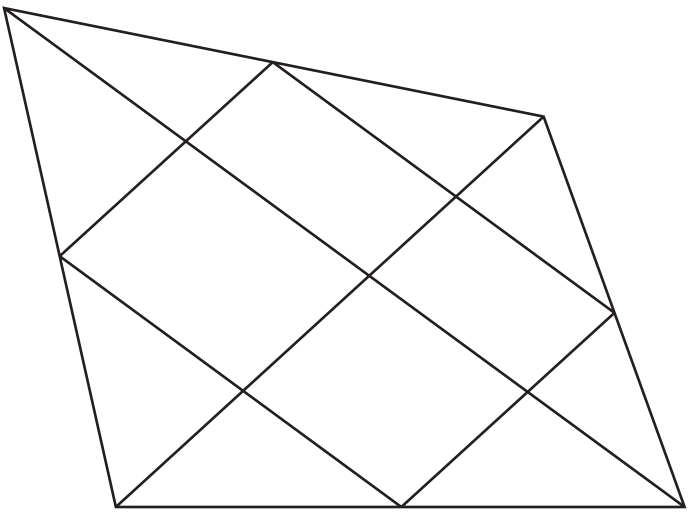
Теорема 37. В параллелограмме сумма квадратов длин диагоналей равна сумме квадратов длин его сторон.

Теорема 38. Площадь произвольного выпуклого четырехугольника равна половине произведения его диагоналей на синус угла между ними.

Теорема 39. Площадь четырехугольника, описанного около окружности, равна произведению полупериметра этого четырехугольника на радиус данной окружности.



Теорема 40. Четырехугольник, вершинами которого являются середины сторон произвольного выпуклого четырехугольника, есть параллелограмм, площадь которого равна половине площади исходного четырехугольника.



Теорема 41. Если у выпуклого четырехугольника диагонали взаимно перпендикулярны, то суммы квадратов противоположных сторон этого четырехугольника равны.

МГУ—1970

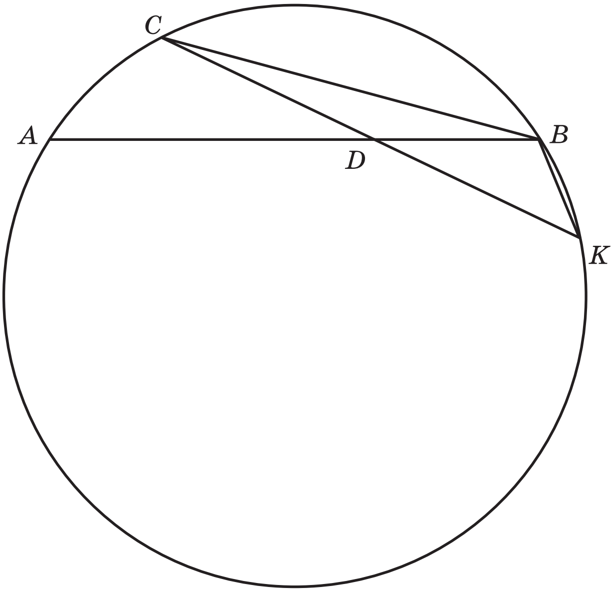
ХИМФАК–4

Вариант 1

Хорда AB стягивает дугу окружности, равную $120°$. Точка C лежит на этой дуге, а точка D лежит на хорде AB. При этом $AD = 2$, $BD = 1$, $DC = \sqrt{2}$.

Найти площадь треугольника ABC.

Ответ: $\dfrac{3}{2\sqrt{2}}$.



Вариант 2

Найти площадь треугольника ABC, если $AC = 3$, $BC = 4$, а медианы AK и BL перпендикулярны.

Ответ: $\sqrt{11}$.

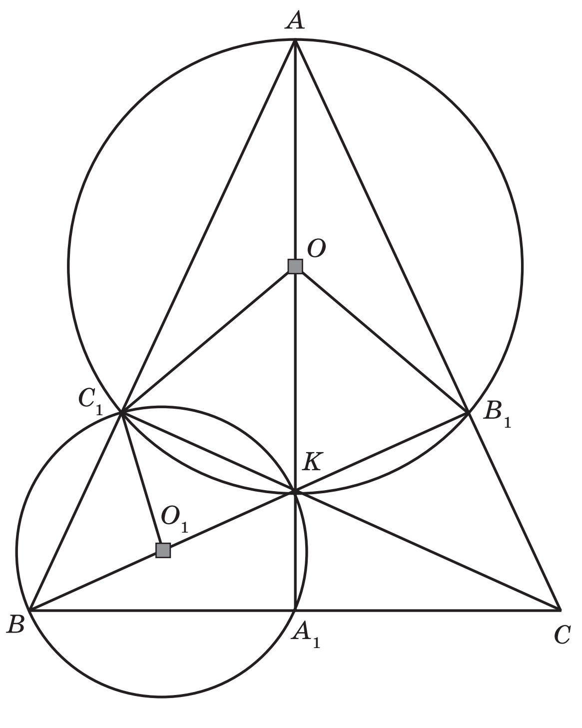
ФИЗФАК–3

Вариант 1

В равнобедренном треугольнике ABC угол между равными сторонами AB и AC равен $\frac{\pi}{4}$. Из вершин треугольника ABC на его стороны опущены высоты AA_1, BB_1, CC_1. Через точки A, B_1 и C_1 проведена окружность O, а через точки B, A_1 и C_1 — окружность O_1.

Найти отношение площади круга O к площади общей части кругов O и O_1.

Ответ: $\dfrac{8\pi}{\pi\left(3-\sqrt{2}\right)-4}$.



Вариант 2

В параллелограмме со сторонами 2 и 4 проведена диагональ длиной 3. В каждый из получившихся треугольников вписано по окружности.

Найти расстояние между центрами окружностей.

Ответ: $\sqrt{\frac{17}{3}}$.

ВМК–4

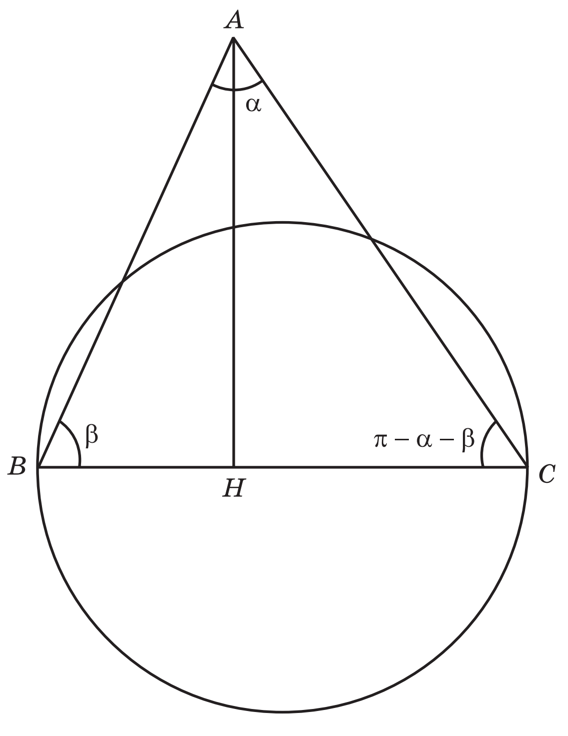
Вариант 1

В треугольнике ABC сторона BC служит основанием полукруга, площадь которого равна площади треугольника ABC. Угол A равен α.

Найти углы B и C, считая, что $B \geq C$. Исследовать, при каких значениях α задача имеет решение.

Ответ: $B = \dfrac{1}{2}\left(\pi - \alpha + \arccos\left(\dfrac{\pi}{2}\sin\alpha - \cos\alpha\right)\right)$,

$C = \dfrac{1}{2}\left(\pi - \alpha - \arccos\left(\dfrac{\pi}{2}\sin\alpha - \cos\alpha\right)\right)$, $\quad 0 < \alpha \leqslant 2\arcsin\dfrac{2}{\sqrt{\pi^2 + 4}}$.



Вариант 2

В треугольнике ABC из вершины угла A на сторону BC опущена медиана, длина которой равна половине среднего геометрического длин сторон AB и AC. Угол A равен α.

Найти углы A_1 и A_2, на которые медиана делит угол A, считая, что $A_1 \geq A_2$. Исследовать, при каких значениях угла α задача имеет решение.

Ответ: $A_1 = \dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{1}{2}\arccos(2\sin^2\alpha + \cos\alpha)$,

$A_2 = \dfrac{\alpha}{2} - \dfrac{1}{2}\arccos(2\sin^2\alpha + \cos\alpha)$, $\dfrac{2}{3}\pi \leqslant \alpha < \pi$.

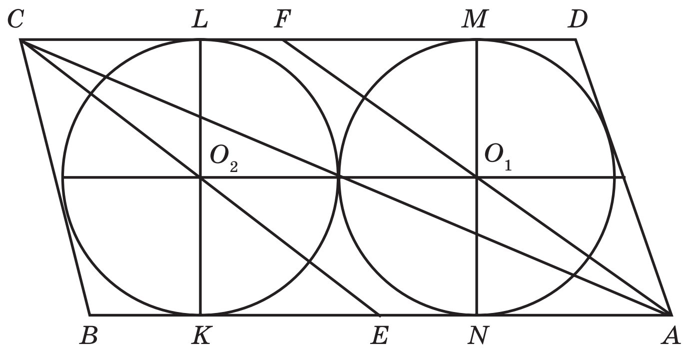
МЕХМАТ–4

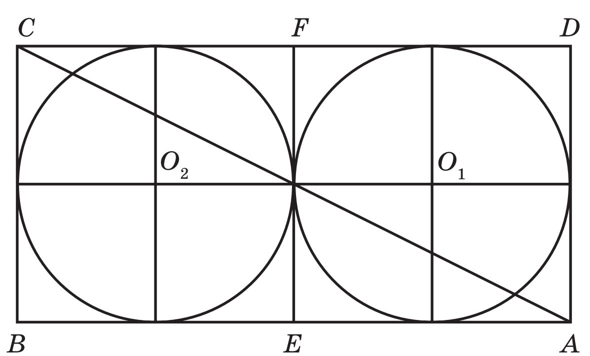
Вариант 1

В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ заключены две окружности одинакового радиуса r, касающиеся друг друга внешним образом. Центр первой окружности находится на отрезке, соединяющем вершину A с серединой F стороны CD, а центр второй окружности находится на отрезке, соединяющем вершину C с серединой E стороны AB. Первая окружность касается сторон AB, AD и CD; вторая окружность касается сторон AB, BC и CD.

Найти AC.

Ответ: $AC = 2\sqrt{5} \cdot r$.





Вариант 2

В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ заключены две окружности одинакового радиуса r, касающиеся друг друга внешним образом. Центр первой окружности находится на отрезке, соединяющем вершину D с серединой E стороны AB, а центр второй окружности находится на отрезке CE. Первая окружность касается сторон AB, AD и CD; вторая окружность касается сторон AB, BC и CD.

Найти синус угла между диагоналями четырёхугольника $ABCD$.

Ответ: $\frac{4}{5}$.

МГУ—1971

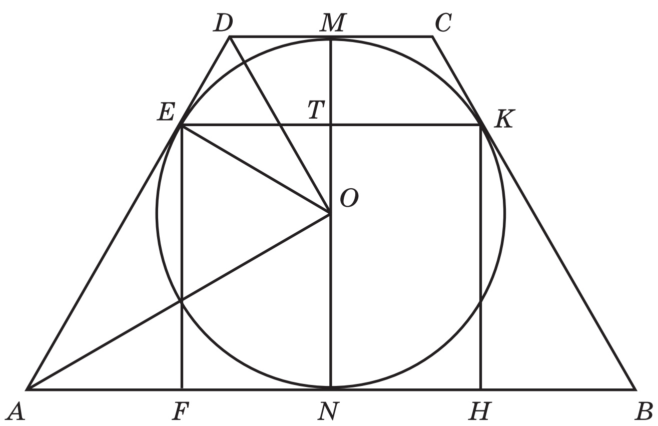
ХИМФАК–1

Вариант 1

Около окружности радиуса r описана равнобочная трапеция $ABCD$. Пусть E и K — точки касания этой окружности с боковыми сторонами трапеции. Угол между основанием AB и боковой стороной AD трапеции равен $60°$.

Доказать, что EK параллелен AB и найти площадь трапеции $ABKE$.

Ответ: $\dfrac{9\sqrt{3}}{4}r^2$.



Вариант 2

В окружность радиуса R вписан равнобедренный треугольник ABC с углом при вершине C, равным $120°$. D — середина меньшей из дуг, соединяющих A и C, E — середина меньшей дуги из соединяющих C и B.

Доказать, что DE параллельна AB, и найти площадь трапеции $ABED$.

Ответ: $\dfrac{R^2}{2}$.

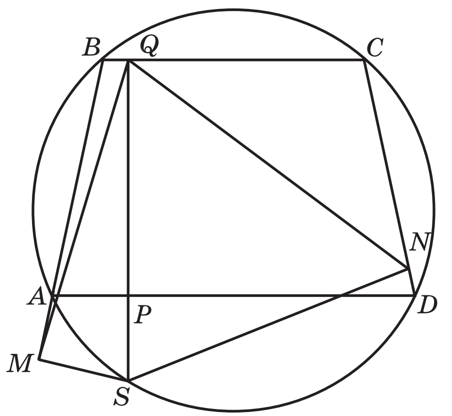
ФИЗФАК–5

Вариант 1

В окружность вписана трапеция $ABCD$ ($AD \parallel BC$, $AD > BC$). На дуге AD, не содержащей вершин B и C, взята точка S. Точки P, Q, M и N являются основаниями перпендикуляров, опущенных из S соответственно на стороны AD, BC, AB и CD (или их продолжения). Известно, что $SP = a$, $SQ = b$, $SN = c$.

Найти отношение площади треугольника MQS к площади треугольника NQS.

Ответ: $\dfrac{ab}{c^2}$.



Вариант 2

В окружность вписан четырёхугольник $ABCD$. На дуге AD, не содержащей вершин B и C, взята точка S. Точки P, Q, M и N являются основаниями перпендикуляров, опущенных из S соответственно на стороны AD, BC, AB и CD (или на продолжения этих сторон). Известно, что $SP = d$, а отношение площади треугольника NQS к площади треугольника MPS равно m.

Найти длину отрезка SN.

Ответ: $d\sqrt{m}$.

СОДЕРЖАНИЕ