Э. Ю. Красс

КОМБИНАТОРИКА В СРЕДНЕЙ ШКОЛЕ

Москва
ИЛЕКСА
2025

УДК 372.851:519.1
ББК 74.200.58+22.174я721
К78

Красс Э. Ю.

К78 Комбинаторика в средней школе. — М. : Илекса, 2025. — 94 с. : ил.

ISBN 978-5-89237-744-7

Учебное пособие предназначено для учащихся 5–9 классов.

В первой части пособия приведены различные способы решения комбинаторных задач с помощью логических рассуждений, графов, таблиц, формул.

Во второй части собраны 100 задач, решение которых поможет освоить основные приемы и методы решения комбинаторных задач, покажет, как комбинаторика может быть использована при изучении других разделов школьной математики. Там, где это целесообразно, даны два варианта решения задачи: один — без применения формул комбинаторики, а другой — с помощью формул комбинаторики.

Данное пособие может быть использовано на уроках математики, внеклассных занятиях, для индивидуальной работы родителей со своими детьми.

УДК 372.851:519.1
ББК 74.200.58+22.174я721

ISBN 978-5-89237-744-7

1. ПРЕДИСЛОВИЕ

С проблемой выбора нужного набора предметов из множества имеющихся, подсчета количества комбинаций расположения предметов в определенном порядке люди сталкивались с древних времен. По мере развития человеческой цивилизации задачи, решаемые комбинаторными методами, усложнялись. Развитие комбинаторики способствовало становлению теории вероятностей, криптографии, теории игр. Комбинаторика оказалась полезной в статистике, генетике, лингвистике и других науках. В настоящее время комбинаторика является самостоятельным разделом математики.

Термин «комбинаторика» впервые в научный оборот в 1666 г. ввел немецкий ученый Г. Лейбниц. Слово «комбинаторика» происходит от латинского слова *combinare*, которое означает «соединять», «сочетать».

Решение комбинаторных задач в школе помогает учиться думать, рассуждать, делать выводы, развивать логику, расширять круг математических знаний и представлений.

В книге приведены 100 задач. Решение первых шестидесяти из них поможет освоить основные приемы и методы решения комбинаторных задач, а решение остальных сорока покажет, как комбинаторика может быть использована при изучении других разделов школьной математики.

Там, где это целесообразно, даны два варианта решения задачи: один без применения формул комбинаторики, а другой с помощью формул комбинаторики. Для упрощения усвоения приводимые правила и формулы даны без доказательств.

2. ПРАВИЛА КОМБИНАТОРИКИ

Рассмотрим несколько комбинаторных задач.

Задача I. *В непрозрачном пакете лежат один белый, один черный и один красный кубики. Сколько существует различных последовательностей выемки этих кубиков из пакета?*

Давайте рассуждать. Первым может быть вынут один из трех кубиков любого цвета. Всего на этом этапе существует три варианта. Следующим, на втором этапе, может быть вынут кубик одного из двух оставшихся цветов. Например, если первым был вынут красный, то следующим может быть вынут белый или черный кубик. Значит, для каждого из трех вариантов на первом этапе имеется по два варианта на втором этапе. Поэтому на втором этапе имеем $3 \cdot 2 = 6$ вариантов. На третьем этапе может быть вынут оставшийся кубик. Таким образом, каждая из шести комбинаций, полученных на втором этапе, добавляется одним оставшимся кубиком. Поэтому на третьем, заключительном, этапе получаем $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ вариантов. Если обозначить красный цвет буквой К, белый цвет — буквой Б, а черный буквой Ч, то это следующие последовательности: БКЧ, БЧК, КБЧ, КЧБ, ЧБК, ЧКБ.

Решение можно проиллюстрировать графически. Исходную позицию обозначим крестиком. На первом этапе из пакета можно достать белый (Б), красный (К) или черный (Ч) кубик (рис. 1*а*).

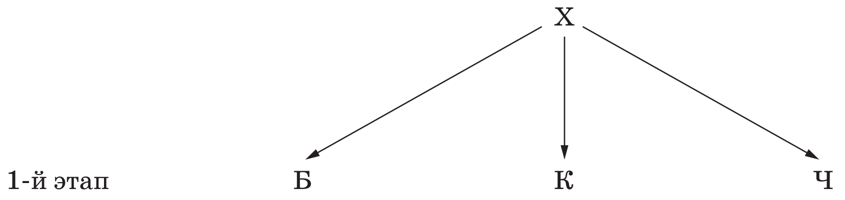

Рис. 1*а*

Если на первом этапе был вынут белый кубик, то следующим может быть красный или черный кубик. Если вынут красный, то следующим может быть вынут белый или черный кубик. А если вынут черный кубик, то следующим может быть белый или красный (рис. 1*б*).

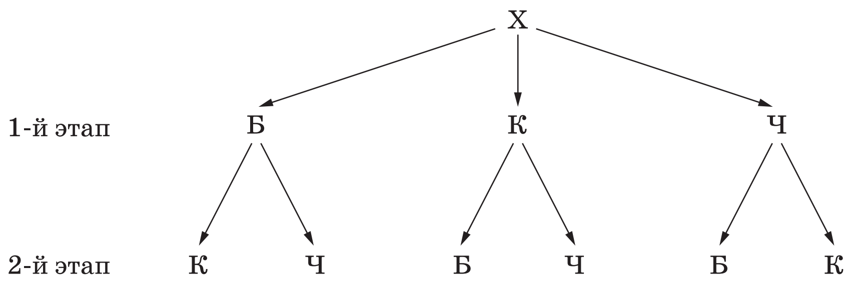

Рис. 1*б*

На третьем этапе к каждой выбранной паре кубиков на предыдущих этапах добавляется последний, третий, кубик. Поэтому окончательно имеем (рис. 1*в*).

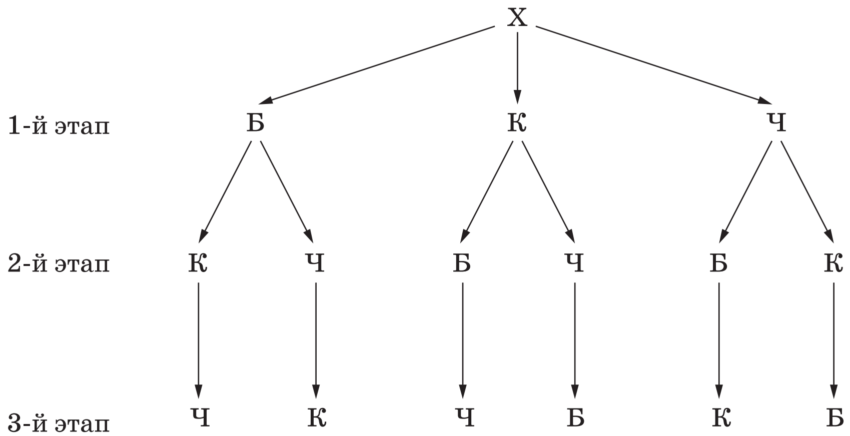

Рис. 1*в*

Получаем те же 6 последовательностей: БКЧ, БЧК, КБЧ, КЧБ, ЧБК, ЧКБ.

Ответ. 6 последовательностей.

Задача II. *В непрозрачном пакете лежат два белых и один черный кубик. Кубики вынимают из пакета и ставят друг на друга столбиком. Сколько существует последовательностей выемки этих кубиков из пакета?*

Решим эту задачу графическим способом, поскольку, решая эту задачу графическим способом, мы фактически воспроизводим логические рассуждения. Итак, исходную позицию обозначим крестиком. На первом этапе из пакета можно достать белый (Б) кубик, другой белый (Б) кубик или единственный черный (Ч) кубик (рис. 2*а*).

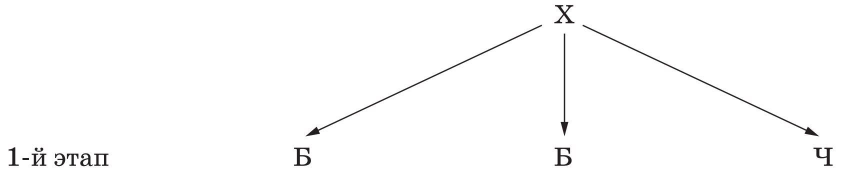

Рис. 2*а*

Если на первом этапе был вынут белый кубик, то следующим может быть белый или черный кубик. А если вынут черный, то следующим может быть только белый кубик (рис. 2*б*).

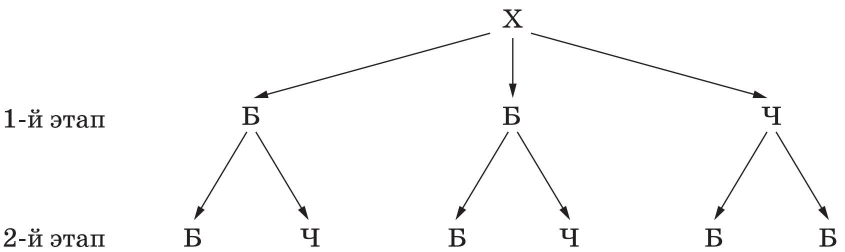

Рис. 2*б*

Если на втором этапе был вынут белый кубик, то третий кубик может быть или белым, или черным. Поэтому окончательно имеем следующую схему (рис. 2*в*).

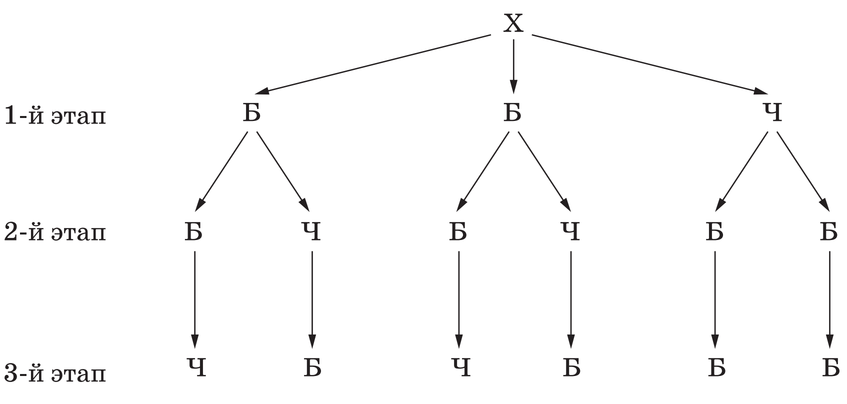

Рис. 2*в*

Получаем следующие 6 последовательностей: ББЧ, БЧБ, ББЧ, БЧБ, ЧББ, ЧББ.

Ответ. 6 последовательностей.

Задача III. *В непрозрачном пакете лежат два белых и один черный кубик. Кубики вынимают из пакета и ставят друг на друга столбиком. Сколько существует различных комбинаций цветов этих столбиков?*

Эту задачу, как и предыдущие, можно решить с помощью логических рассуждений или графическим способом. А можно использовать готовое решение задачи II, убрав по одной комбинации в каждой паре равных. Получим ответ — 3 комбинации. Но проще и быстрее решить эту задачу, отслеживая положение черного кубика в столбике. Черный кубик может быть в столбике или верхним, или средним, или средним. Всего три варианта. Значит, имеется три комбинации цветов этих столбиков: ЧББ, БЧБ, ББЧ.

Ответ. 3 комбинации.

Задача IV. *Сколько двузначных чисел можно образовать из цифр 1, 2, 3, 4? В записи двузначного числа цифры не могут повторяться.*

Решим эту задачу, рассуждая следующим образом. В разряде десятков может находиться любая цифра из четырех данных. А так как цифры в записи искомого двузначного числа не могут повторяться, то в разряде единиц может быть только одна из трех не задействованных цифр. Итак, каждой из четырех цифр разряда десятков приписывается каждая из трех цифр разряда единиц. Получаем $4 \cdot 3 = 12$ двузначных чисел. Это числа: 12, 13, 14, 21, 23, 24, 31, 32, 34, 41, 42, 43.

Покажем решение этой задачи графическим способом. Исходную позицию обозначим крестиком. На первом этапе выбираем цифру в разряде десятков. Ею может быть любая цифра из четырех данных (рис. 3*а*).

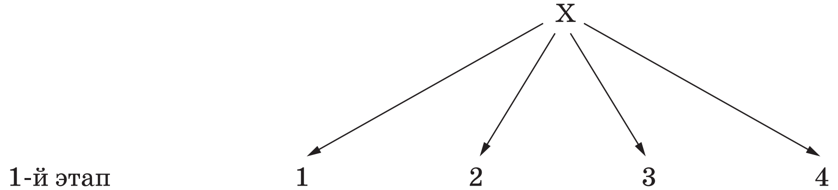

Рис. 3*а*

На втором этапе выбираем цифру в разряде единиц. Ею может быть любая из трех оставшихся цифр. Поэтому окончательно имеем следующую схему (рис. 3*б*).

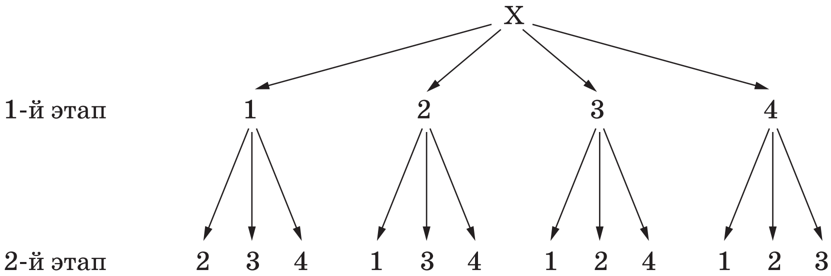

Рис. 3*б*

Получаем следующие 12 двузначных чисел: 12, 13, 14, 21, 23, 24, 31, 32, 34, 41, 42, 43.

Примечание. Ход рассуждений и ответ задачи не изменятся, если начать не с выбора цифры в разряде десятков, а с выбора цифры в разряде единиц.

Ответ. 12 чисел.

Задача V. *Сколько двузначных чисел можно образовать из цифр 1, 2, 3, 4? В записи двузначного числа цифры могут повторяться.*

Рассуждаем. В разряде десятков может находиться любая цифра из четырех данных. А так как цифры в записи искомого двузначного числа могут повторяться, то в разряде единиц также может быть любая из четырех данных цифр. Итак, каждой из четырех цифр разряда десятков приписывается каждая из четырех цифр разряда единиц. Получаем $4 \cdot 4 = 16$ двузначных чисел: 11, 12, 13, 14, 21, 22, 23, 24, 31, 32, 33, 34, 41, 42, 43, 44.

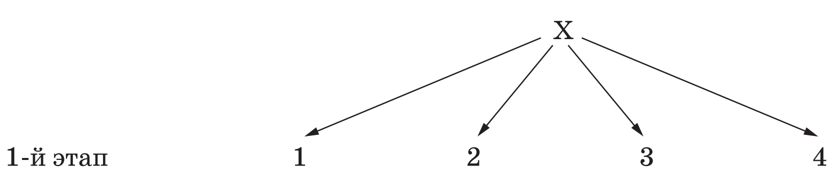

Рис. 4*а*

Решим эту задачу графическим способом. Исходную позицию обозначим крестиком. На первом этапе выбираем цифру в разряде десятков. Ею может быть любая цифра из четырех данных (рис. 4*а*).

На втором этапе выбираем цифру в разряде единиц. Ею может быть любая из четырех данных цифр. Поэтому окончательно имеем следующую схему (рис. 4*б*).

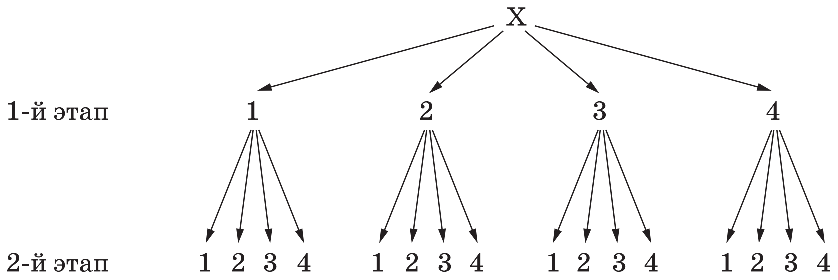

Рис. 4*б*

Получаем следующие 16 двузначных чисел: 11, 12, 13, 14, 21, 22, 23, 24, 31, 32, 33, 34, 41, 42, 43, 44.

Ответ. 16 чисел.

Задача VI. *Сколько двузначных чисел можно образовать из цифр 0, 2, 3, 4? В записи двузначного числа цифры не могут повторяться.*

Рассуждаем. В разряде десятков может быть любая из данных цифр, кроме нуля. Это три цифры: 2, 3 и 4. В разряде единиц может находиться любая цифра из четырех данных, за исключением одной, равной цифре в разряде десятков. Итак, каждой из трех цифр в разряде десятков соответствует одна из трех цифр в разряде единиц. Получаем $3 \cdot 3 = 9$ двузначных чисел: 20, 23, 24, 30, 32, 34, 40, 42, 43.

Представим графическое решение этой задачи. Для этого исходную позицию обозначим крестиком. На первом этапе выбираем цифру в разряде десятков. Ею может быть любая цифра из четырех данных, не равная нулю (рис. 5*а*).

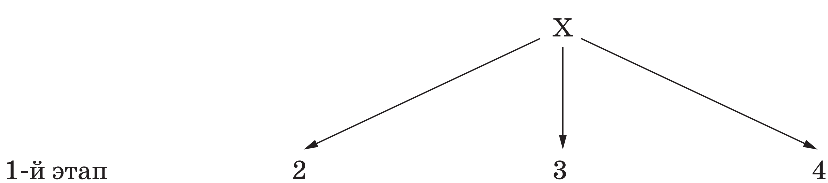

Рис. 5*а*

СОДЕРЖАНИЕ