

Л. С. Сагателова

МАТЕМАТИКА

РЕШАЕМ ТЕКСТОВЫЕ ЗАДАЧИ

7–11 КЛАССЫ

Москва
ИЛЕКСА
2025

УДК 372.851:51
ББК 22.130:74.262.21721
С34

Сагателова, Л. С.

С34 Математика. Решаем текстовые задачи. 7—11 классы /
Л. С. Сагателова. — М. : Илекса, 2025. — 158 с. : ил.
ISBN 978-5-89237-746-1

Пособие содержит разбор всех типов текстовых задач, изучаемых в школьном курсе математики 7—11 классов, методические рекомендации, примеры решения, задания для самостоятельных и диагностических работ. Пособие может быть полезно учащимся, желающим в кратчайшие сроки уточнить, расширить, углубить и систематизировать свои знания по теме «Текстовые задачи» и успешно сдать экзамены. Материал, представленный в пособии, может быть эффективно использован на уроках алгебры. Пособие адресовано методистам, учителям математики средних общеобразовательных организаций, учащимся школ и студентам педагогических вузов.

УДК 372.851:51
ББК 22.130:74.262.21

Учебное издание
Сагателова Лиана Сергеевна

МАТЕМАТИКА
РЕШАЕМ ТЕКСТОВЫЕ ЗАДАЧИ
7—11 КЛАССЫ

Подписано в печать 04.10.2024
Формат 60×88/16. Усл. печ. л. 7,82.
Тираж 1000 экз. Заказ

ООО «Илекса»
+7(964) 534-80-01
real-ilexa@yandex.ru
www.ilexa.ru

ISBN 978-5-89237-746-1

© Сагателова Л. С., 2025
© ИЛЕКСА, 2025

Кто с детских лет занимается математикой, тот развивает внимание, тренирует свой мозг, свою волю, воспитывает настойчивость и упорство в достижении цели.

А. И. Маркушевич

ВВЕДЕНИЕ

В пособии предлагается задачный материал, соответствующий программе по математике 7—11 классов. Приводятся основные теоретические сведения, рассматриваются основные методы решения, а также предлагаются задачи для самостоятельного решения с ответами. Решение текстовых задач развивает логическое мышление, сообразительность, наблюдательность, исследовательские навыки. Текстовые задачи являются традиционными на экзаменах по математике.

Материал пособия выстроен содержательно таким образом, что позволяет преодолеть трудности, возникающие при изучении темы. Задачи, предлагаемые в каждом разделе, от самых простых, доступных всем учащимся, до сложных и очень сложных, могут быть решены как самими учащимися, так и разобраны под руководством учителя. В целях развития у обучающихся познавательного интереса к решению задач и к изучению математики в пособии представлен исторический и занимательный материал, а также предлагаются задачи, связанные с именами выдающихся личностей, с деталями быта и вычислительной практикой прошлого. Задачи с практическим содержанием демонстрируют учащимся применение математического аппарата к решению повседневных бытовых проблем каждого человека, вопросов рыночной экономики и задач технологии производства.

МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ТЕКСТОВЫХ ЗАДАЧ

Текстовые¹ задачи представляют собой традиционный раздел элементарной математики. Под текстовой задачей понимается описание некоторой проблемы или проблемной ситуации на естественном языке с требованием дать количественную характеристику того или иного компонента этой ситуации [20, с. 4]. Любая текстовая задача школьного курса математики является конкретно-практической, так как учит разрешать жизненную, производственную или научную проблему, с которой сталкивается любой человек. Умение решать текстовые задачи способствует сознательному и прочному овладению системой знаний и навыков самостоятельной работы, развитию мыслительных способностей обучающихся, проявлению, формированию и развитию творческой деятельности и творческих способностей [19, с. 14].

В обновленном Федеральном государственном образовательном стандарте основного общего образования отмечаются следующие умения, которыми должны овладеть учащиеся: «умение решать задачи разных типов (в том числе на проценты, доли и части, движение, работу, цену товаров и стоимость покупок и услуг, налоги, задачи из области управления личными и семейными финансами); умение составлять выражения, уравнения, неравенства и системы по условию задачи, исследовать полученное решение и оценивать правдоподобность полученных результатов» [26].

Текстовые задачи, как и вообще все математические задачи, играют в обучении математике двоякую роль: с одной стороны, они являются целью обучения, с другой — средством обучения [11]. Текстовые задачи, предлагаемые в учебниках математики, обычно «привязаны» к определенным разделам математики и являются, по сути, учебными задачами, цель которых заключается в обучении учащихся овладению определенными способами действий. Такой подход создает определенные проблемы при изучении темы «Текстовые задачи».

¹ Ударение на предпоследней гласной. Розенталь Д. Э., Теленкова М. А. Словарь трудностей русского языка: около 30 000 слов. — 6-е изд., испр. и доп. — М.: Русский язык, 1987. — С. 359.

С самого начала зарождения математики математические знания передавались из поколения в поколение в виде списка задач практического содержания и образцов решения этих задач. Изначально обучение математике проводилось по примеру (образцу) при помощи определенных правил (алгоритмов действий) [37; 46]. В такой модели «обучения по правилам» ученик считался обученным, если был способен предоставить правильный ответ, при этом не акцентировалось внимание на типах задач и методах их решения. Разумеется, такой подход к решению текстовых задач не развивал мышление. Лишь с середины XX века стала разрабатываться и совершенствоваться методика обучения решению текстовых задач, однако, как показывают результаты итоговой аттестации учащихся средних и старших классов, она не реализуется в полной мере на практике.

Историческая справка. Первый учебник математики в России был создан в 1703 году. Автором этого учебника стал Леонтий Филиппович Магницкий, а назывался учебник «Арифметика, сиречь наука числительная...». Книга эта содержит начала математических знаний того времени: арифметики, алгебры, геометрии и тригонометрии. Большую часть книги автор посвящает арифметике. Магницкий высоко ценит теорию. Он делит свою «Арифметику» на две книги: первую называет «арифметика-политика», вторую — «арифметика-логистика». Первая адресована тем, кто желает только научиться решать практические вопросы: «исчисляти всякое исчисление в продаже и куплях». Эта часть изложена без доказательств, рассказом и показом — решением примеров. Вторая часть — «арифметика-логистика» — решает общие вопросы, «токмо уму нашему подлежащие». Эта «Арифметика...» прослужила в качестве школьного учебника почти до середины XVIII века. Она содержала задачи практического содержания вместе с их решениями. Обучение математике велось по образцам (по «правилам»). По-другому в те времена учить не умели. Обучение «по правилам» было обычным для России, учитель лишь формулировал основные определения и правила и разбирал решение типовых задач. Ученик должен был знать на память ряд правил и решать задачи, попадающие в сферу его деятельности. В давние времена обученным считался тот, кто умел решать задачи определен-

ных типов, встречавшихся на практике (в торговых расчетах и пр.). При этом учителя мало заботились о сознательном усвоении учениками того или иного способа действия.

Под умением решать задачи будем понимать умение, складывающееся из определенной совокупности сформированных свойств мышления, знаний о задаче и способах и процессе ее решения [11; 41].

Обучение решению текстовых задач — это специально организованное взаимодействие учителя и учащихся, предполагающее формирование «у учащихся потребности и способности в осуществлении творческого преобразования учебного материала с целью овладения новыми знаниями в результате собственного поиска» [39]. Кроме того, учитель математики должен уметь конструировать системы задач, отбирая задачи и располагая их в определенной последовательности таким образом, чтобы выработать у учащихся умения, позволяющие решать любые задачи из курса математики.

В методической литературе имеет место смешение таких понятий, как «методика решения задач» и «методика обучения решению задач» [17; 24; 28]. В большей мере оказались разработанными вопросы, касающиеся решения задач определенного типа, и в меньшей мере — обучение решению текстовых задач. Разграничение указанных понятий позволяет выделить содержание обучения решению текстовых задач: типы задач, процесс решения, методы решения, способы и приемы выполнения каждого этапа решения.

Любая задача — это текст, смысл которого следует понять, чтобы затем на его основе смоделировать описанную ситуацию. Под моделью (франц. *modèle* от лат. *modulus* — «мера, аналог, образец») понимается упрощенное представление о реальном объекте, процессе или явлении, которое отражает его существенные свойства. Процесс построения моделей называется моделированием, а исходный объект называется при этом прототипом или оригиналом. Моделирование позволяет лучше понять задачу, выяснить отношения между данными и искомыми величинами. Моделирование предполагает принятие допущений, при этом должны удовлетворяться следующие требования: адекватность (соответствие модели оригиналу); точность (совпадения полученных в процессе моделирования результатов с исходными,

согласование их между собой); универсальность (применимость модели для решения большего круга задач); целесообразность (удачный выбор модели). При решении текстовых задач обычно применяются эвристические, графические, математические модели или их комбинации. Одной из самых важных задач моделирования является выбор модели, наиболее адекватной оригиналу.

Эвристическое моделирование основывается «на анализе содержания задачи, выведения следствий, преобразований, которые могут привести к отысканию нужного метода решения задачи» [31].

Графическое моделирование предполагает использование при решении текстовых задач графиков (наглядное изображение количественных соотношений и зависимостей между числами или величинами в виде кривой, прямой, ломаной линий), схем (упрощенное графическое изображение предмета или процесса с пояснением и описанием в самых общих чертах), чертежей (графическое изображение в задачах с удобными числовыми данными, позволяющими начертить отрезок заданной длины), графов (геометрическая модель, представляющая собой множество ребер и вершин, на которых нанесены значения величин исследуемого объекта).

Математическое моделирование основывается на представлении оригинала (реальных процессов и явлений) посредством совокупности взаимосвязанных математических и формально-логических выражений. При решении текстовых задач применяются численные модели, представляющие собой уравнения и неравенства, системы уравнений и неравенств, устанавливающие взаимосвязи между значениями величин.

Любая задача состоит из двух основных частей: условия (количественные и качественные характеристики объектов и отношений между ними) и требования (указание того, что нужно найти). Величину, значения которой требуется найти, называют *искомой величиной*.

Задачи, в которых имеется одинаковая зависимость между величинами при возможном различии их числовых данных и содержания, образуют определенный тип. Задачи одного типа имеют одну и ту же алгебраическую модель. Отметим, что в методике преподавания математики не существует

единой классификации текстовых задач. Общепринята следующая классификация задач по типам:

- задачи на движение;
- задачи на совместную работу;
- задачи на планирование;
- задачи на проценты;
- задачи на смеси, сплавы, концентрацию;
- задачи на зависимость между компонентами арифметических действий.

Решение текстовых задач осуществляется поэтапно. Под этапами в нашем случае понимается некоторый временной промежуток, на протяжении которого происходят качественные изменения характеристик форм деятельности учащихся. Последовательность этапов обусловлена логикой условия задачи. Между тем следует отметить, что единого взгляда на количество этапов и их названия в методике до сих пор нет. Традиционно принято выделять следующие этапы:

1. Восприятие задачи и ее первичный анализ.
2. Поиск решения задачи и составление плана решения.
3. Выполнение решения, формулировка ответа на вопрос задачи.

4. Проверка решения задачи и при необходимости его корректировка.

5. Формулировка окончательного ответа на вопрос задачи или вывода о выполнении требования задачи.

Подход к анализу деятельности по решению задач на каждом этапе является наиболее конструктивным. В реальном процессе решения текстовой задачи названные выше этапы не имеют четких границ. Остановимся подробно на каждом этапе.

Назначение первого этапа, по мнению Л. М. Фридмана, — «обеспечить понимание решающим всех сторон описываемой в задаче ситуации без выяснения того, как найти ее решение» [40, с. 59]. Процесс решения задачи на первом этапе предполагает развитие у учащихся следующих умений: 1) внимательное чтение задачи; 2) первичный анализ текста: выделение вопроса задачи и ее условия; 3) оформление краткой записи задачи; 4) выполнение чертежей, рисунков, схем по тексту задачи. На первом этапе решения задачи следует уделять внимание основательному изучению текста задачи.

Неверно прочитанное условие задачи, как отмечается в «Методических рекомендациях для учителей, подготовленных на основе анализа типичных ошибок участников ЕГЭ 2023 года по математике», является по-прежнему одной из самых типичных ошибок на экзамене. Авторы рекомендуют «уделять особое внимание развитию навыка понимания условия, умению перевести его на математический язык» [26]. Таким образом, неумение учащихся внимательно читать текст и является первой причиной затруднений в решении задач. Постановка специальных вопросов (Какой процесс описывается в задаче? Какими величинами характеризуется? Какая связь между величинами? Значения каких величин известны? Значения каких величин неизвестны? Значения каких величин сравниваются? Что требуется найти?) и поиск ответов на них позволяют детально разобраться в содержании задачи. Краткая запись задачи представляет собой лаконичную форму записи содержания задачи, выполненную с помощью опорных слов, и является хорошим средством для понимания и анализа содержания задачи, поиска путей ее решения и выстраивания плана действий. Форма краткой записи может быть различной — либо словесное описание, либо схематический рисунок либо таблица всех известных и неизвестных данных задачи. Если решение задачи не усложнено условиями, можно ограничиться только словесным описанием. Вводятся обозначения неизвестных величин и записываются выражения с переменной. Обычно этот этап начинается с фразы: «Пусть x единиц — ..., тогда...». При введении переменной необходимо учесть наибольшее удобство математической записи условия задачи. Далее составляется уравнение (система уравнений) или неравенство с известными и неизвестными данными задачи.

Краткая запись условия задачи в форме таблицы может существенно сэкономить время, затраченное на оформление и пояснения к действиям. Главное достоинство таблицы — наглядность и эффективность. С помощью таблиц удобнее решать текстовые задачи на движение, на смеси и сплавы, на совместную работу. Краткую запись в виде рисунка целесообразно использовать при решении задач, в которых даны отношения значений величин (больше, меньше, столько же), а также при решении задач, связанных с движением.

При этом надо соблюдать указанные в условии отношения: большее расстояние изображать бóльшим отрезком. Чертеж наглядно иллюстрирует отношение значений величин, а в задачах на движение схематически изображает соответствующую ситуацию. Хочется отметить, что работа над краткой записью условия задачи позволяет ученику абстрагироваться от сюжета в условии задачи, приводя к пониманию того, что многие задачи с разными сюжетами решаются по одной математической модели (см. задачу 10 и задачу 11). Таким образом, в результате выполнения первого этапа решающий должен понять задачу.

На втором этапе решения задачи осуществляется поиск и составление плана решения задачи. Данный этап предполагает развитие у учащихся следующих умений: 1) выделение данных и искомых, установление связей между данными, между данными и искомыми; 2) осуществление поиска решения и составление плана решения задачи; 3) перевод словесного текста задачи на математический язык; 4) актуализация теоретических знаний, необходимых для решения задачи. Поиск плана решения задачи – это сложный процесс. Под планом решения задачи понимается некоторая идея, которая может оказаться как верной, так и неверной. В методической литературе выделяют следующие приемы поиска плана решения текстовой задачи: 1) по предметной или графической модели; 2) с помощью перевода словесного задания на язык математических выражений; 3) с помощью рассуждений «от вопроса к данным» и «от данных к вопросу» [42, с. 73].

Третий этап решения задачи — реализация плана, намеченного в результате выполнения первых двух этапов. Осуществление третьего этапа можно охарактеризовать через метод решения и форму его выполнения.

Под методом решения задачи в математике понимают совокупность приемов, способов, правил, используемых для достижения определенного результата — ответа задачи [41]. Под способом решения задачи, согласно Г. А. Баллу, понимается система операций, выполнение которых обеспечивает решение задачи [2]. Таким образом, понятие «метод» шире понятия «способ». Тогда разные способы решения задачи будут пониматься однозначно и основным признаком решения

задачи различными способами — это отличие связей между данными и искомыми величинами.

Историческая справка. При решении задачи самое главное — осмыслить содержание задачи и выразить его на языке алгебры, т. е. записать условие задачи посредством символов — математических знаков. Великий Ньютон в своем учебнике алгебры, озаглавленном «Всеобщая арифметика», писал: «Чтобы решить вопрос, относящийся к числам или к отвлеченным отношениям величин, нужно лишь перевести задачу с родного языка на алгебраический». Как именно выполняется такой перевод с родного языка на алгебраический, Ньютон показал на примерах. Приведем один из них.

На родном языке	На языке алгебры
Купец имел некоторую сумму денег	x
В первый год он израсходовал 100 фунтов	$x - 100$
К оставшейся сумме добавил третью ее часть	$x - 100 + \frac{x - 100}{3} = \frac{4x - 400}{3}$
В следующем году он вновь израсходовал 100 фунтов и увеличил оставшуюся на третью ее часть	$\frac{4x - 400}{3} - 100 = \frac{4x - 700}{3} + \frac{4x - 700}{9} = \frac{16x - 2800}{9}$
В третьем году он опять израсходовал 100 фунтов	$\frac{16x - 2800}{9} - 100 = \frac{16x - 3700}{9}$
После того, как он добавил к остатку третью его часть, капитал стал вдвое больше первоначального	$\frac{16x - 3700}{9} + \frac{16x - 3700}{27} = \frac{64x - 14800}{27}$

Чтобы определить первоначальный капитал купца, остается только решить уравнение.

Приведем еще один пример. Задача о жизни Диофанта из «Палатинской антологии» греческого математика и поэта

VI в Метродора, оформленная в виде эпитафии — надгробной надписи.

Прах Диофанта гробница покоит: дивись ей — и камень
 Мудрым искусством его скажет усопшего век.
 Волей богов шестую часть жизни он прожил ребенком
 И половину шестую встретил с пушком на щеках.
 Только минула седьмая, с подругою он обручился.
 С нею пять лет проведя, сына дождался мудрец.
 Только полжизни отцовской возлюбленный сын его
 прожил.
 Отнят он был у отца ранней могилой своей.
 Дважды два года родитель оплакивал тяжкое горе.
 Тут и увидел предел жизни печальной своей.

Так, задачу, которая рассказывает о жизни Диофанта, переведем на язык алгебры следующим образом:

Все годы жизни Диофанта	x лет
Диофант провел шестую часть своей жизни в детстве	$\frac{x}{6}$ лет
Диофант провел двенадцатую часть своей жизни в юности	$\frac{x}{12}$ лет
После седьмой части, проведенной в бездетном супружестве, и еще 5 лет у него родился сын	$\left(\frac{x}{7} + 5\right)$ лет
Сын умер по достижении половины числа лет жизни отца	$\frac{x}{2}$ лет
После чего Диофант прожил только 4 года	4 года

Сложив числа лет жизни Диофанта, выраженные иносказательно, составим уравнение: $\frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4 = x$.

Решив это уравнение, мы узнаем, что Диофант прожил 84 года, женился в 21 год, в 38 родил сына и потерял его на 80 году жизни. Все важнейшие события, происшедшие в жизни замечательного ученого, «зашифрованы» в надписи

на его гробнице — надписи, составленной в форме математической задачи.

В теоретическом плане методы решения основных задач представляют собой самостоятельный, в определенном плане даже изолированный, фрагмент математической теории, причем сложность чисто математических конструкций, лежащих в его основе, невелика. Среди методов решения текстовых задач выделяют арифметический, алгебраический, геометрический, графический, практический, логический и др. В основе каждого метода лежат различные виды математических моделей. Дадим краткую характеристику методам решения текстовых задач, которые встречаются в школьном курсе математики.

Арифметический метод заключается в выполнении *арифметических действий над* числовыми данными из условия задачи. Конечный результат вычислений — ответ на вопрос задачи. При решении текстовых задач арифметическим методом используют следующие приемы:

- запись по действиям (с пояснениями, без пояснений, с вопросами);
- запись в виде выражения (с записью шагов по его составлению, вычислений и полученного результата этих вычислений — равенства; в виде выражения, преобразуемого после вычислений в равенство, без записи шагов по составлению его; по действиям).

Задача 1. Два мотоциклиста выехали из двух населенных пунктов навстречу друг другу. Первый ехал со скоростью 45 км/ч и через 2 ч встретил второго. Второй мотоциклист ехал до встречи 3 ч. Какова скорость второго мотоциклиста, если расстояние между населенными пунктами 216 км?

Решение.

1. Сколько километров до встречи проехал первый мотоциклист?

$$45 \cdot 2 = 90 \text{ (км)}.$$

2. Сколько километров до встречи проехал второй мотоциклист?

$$216 - 90 = 126 \text{ (км)}.$$

3. Какова скорость второго мотоциклиста?

$$126 : 3 = 42 \text{ (км/ч)}.$$

О т в е т: 42 км/ч.

Алгебраический метод трактуется как метод буквенных вычислений. Решить задачу алгебраическим методом — это значит составить и решить уравнение или систему уравнений (или неравенств). Решение любой текстовой задачи алгебраическим методом складывается из следующих этапов:

- выделение величин, о которых идет речь в тексте задачи, и установление зависимости между ними;
- введение переменных (обозначают буквами неизвестные величины);
- составление уравнений или системы уравнений с помощью введенных переменных и данных задачи;
- решение полученных уравнений или систем;
- проверка найденных значений по условию задачи и запись ответа.

Решение задачи алгебраическим способом надо начинать с краткой записи условия задачи, что позволит осмыслить задачу и выяснить связь между величинами. Одну и ту же задачу можно решить, составив различные уравнения или системы уравнений (неравенств), в основе которых лежат различные соотношения между данными и искомыми величинами. Приведем пример.

Задача 2. Расстояние между двумя станциями железной дороги 120 км. Первый поезд проходит это расстояние на 50 мин быстрее, чем второй. Известно, что скорость первого поезда больше скорости второго на 12 км/ч. Определите скорость первого поезда.

Сделаем краткую запись условия задачи в форме таблицы.

	S (км)	v (км/ч)	t (ч)
I	120		
II	120		
		$v_1 > v_2$ на 12 км/ч	$t_1 < t_2$ на $\frac{5}{6}$ ч

Если для одной и той же задачи можно составить различные уравнения, то это означает, что данную задачу можно решить различными алгебраическими способами.

Составим различные модели текстовой задачи.

1.		S (км)	v (км/ч)	t (ч)
	I	120	x	$\frac{120}{x}$
	II	120	y	$\frac{120}{y}$
			$v_1 > v_2$ на 12 км/ч	$t_1 < t_2$ на $\frac{5}{6}$ ч

$$\begin{cases} x - y = 12, \\ \frac{120}{y} - \frac{120}{x} = \frac{5}{6}. \end{cases}$$

2.		S (км)	v (км/ч)	t (ч)
	I	120	$\frac{120}{x}$	x
	II	120	$\frac{120}{x + \frac{5}{6}}$	$x + \frac{5}{6}$
			$v_1 > v_2$ на 12 км/ч	$t_1 < t_2$ на $\frac{5}{6}$ ч

$$\frac{120}{x} - \frac{120}{x + \frac{5}{6}} = 12.$$

3.		S (км)	v (км/ч)	t (ч)
	I	120	$\frac{120}{x}$	x
	II	120	$\frac{120}{x} - 12$	$\frac{120}{\frac{120}{x} - 12}$
			$v_1 > v_2$ на 12 км/ч	$t_1 < t_2$ на $\frac{5}{6}$ ч

$$x - \frac{120}{\frac{120}{x} - 12} = \frac{5}{6}.$$

4.		S (км)	v (км/ч)	t (ч)
	I	120	$x + 12$	$\frac{120}{x + 120}$
	II	120	x	$\frac{120}{x}$
			$v_1 > v_2$ на 12 км/ч	$t_1 < t_2$ на $\frac{5}{6}$ ч

Остановимся на четвертой модели.

Следующий этап решения задачи — исследование и упрощение модели.

$$\frac{120}{x + 12} - \frac{120}{x} = \frac{5}{6} \text{ — неверно! (анализ модели)}$$

$\frac{120}{x} - \frac{120}{x + 12} = \frac{5}{6}$, упростим, разделив обе части уравнения на 5, получим:

$$\frac{24}{x} - \frac{24}{x + 12} = \frac{1}{6}.$$

После стандартных преобразований получаем квадратное уравнение $x^2 + 12x - 1728 = 0$, решением которого являются числа

$$\begin{cases} x = -48; \\ x = 36. \end{cases}$$

Обязательно возвращаемся к вопросу задачи и записываем ответ.

$x = -48$ не подходит по условию задачи.

Итак, скорость первого поезда 36 км/ч.

О т в е т: 36 км/ч.

Краткую запись задачи, решаемой алгебраическим методом, можно оформить в виде схемы, представляющей чертеж, на котором все взаимосвязи и взаимоотношения величин передаются приблизительно, без соблюдения масштаба. С помощью схем удобно решать задачи на смеси, растворы и сплавы. Приведем пример.

Задача 3. В сосуд, содержащий 5 л 12%-го водного раствора некоторого вещества, добавили 7 л воды. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора?

Р е ш е н и е. Воспользуемся схемой со следующим алгоритмом.

1. Изобразим сосуды с раствором в виде кругов. Запишем, сколько литров содержится в каждом из сосудов. Имеет место закон сохранения массы: «сколько смешали — столько получили».

$$\begin{array}{c} \bigcirc \\ 5 \end{array} + \begin{array}{c} \bigcirc \\ 7 \end{array} = \begin{array}{c} \bigcirc \\ 12 \end{array}$$

2. Далее записываем долю растворенного вещества в каждом из сосудов. Концентрацию полученного раствора обозначим через x .

$$\begin{array}{c} 0,12 \\ \bigcirc \\ 5 \end{array} + \begin{array}{c} 0 \\ \bigcirc \\ 7 \end{array} = \begin{array}{c} x \\ \bigcirc \\ 12 \end{array}$$

3. Записываем уравнение: $0,12 \cdot 5 = x \cdot 12$, решив его, получаем $x = 0,05$. Переводим доли в проценты и получаем концентрацию нового раствора, она равна 5%.

О т в е т: 5%.

Графический метод. Решить задачу графически – значит решить задачу с помощью графиков в прямоугольной системе координат. Графический метод является неординарным и рациональным, отличается простотой и наглядностью. При решении текстовых задач графическим методом необходима аккуратность при построении графиков, правильный выбор масштаба, умение производить простые геометрические построения. Выполнение арифметических действий над числами носит здесь вспомогательный характер. Графически удобно решать задачи на движение: каждая точка графика определяется двумя значениями: временем движения объекта и расстоянием от некоторого исходного пункта. Различным движущимся объектам соответствуют различные траектории движения. По точкам пересечения траекторий можно определить, когда и на каком расстоянии от исходного пункта объекты встретятся.

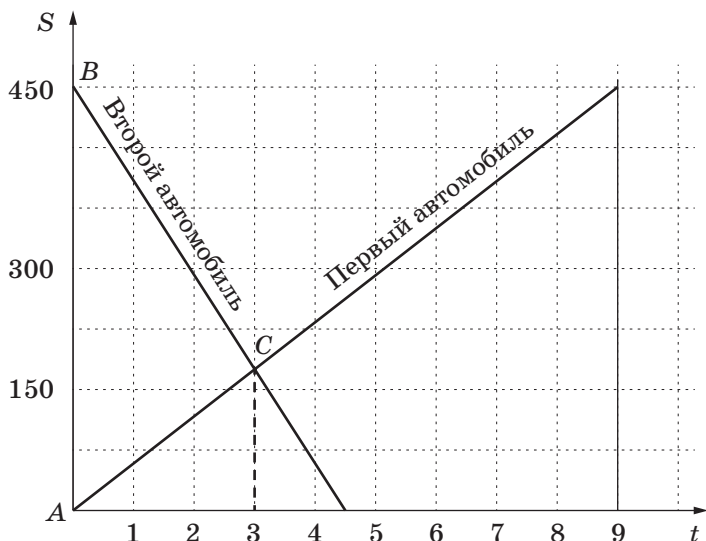
Задача 4. Расстояние между двумя городами равно 450 км. Два автомобиля выходят одновременно навстречу

друг другу. Один автомобиль мог бы пройти все расстояние за 9 ч, другой — вдвое быстрее. Через сколько часов они встретятся?

Р е ш е н и е.

1. Построим траектории движения автомобилей. Расстояние между городами (от точки A до точки B) равно 450 км. На оси расстояний (вертикальная ось) отложим отрезки 7 клеток = 450 км. На оси времени возьмем масштаб: 1 клетка = 1 ч.

2. Соединив отрезками прямой точки начала и конца пути каждого автомобиля, получим траектории их движения. Точка пересечения этих траекторий, которую обозначим буквой C , соответствует моменту встречи.



3. Спроецировав точку C на ось времени, получим время встречи — 3 ч. Следовательно, встреча произошла через 3 ч. Так, не производя никаких вычислений, мы быстро получили ответ.

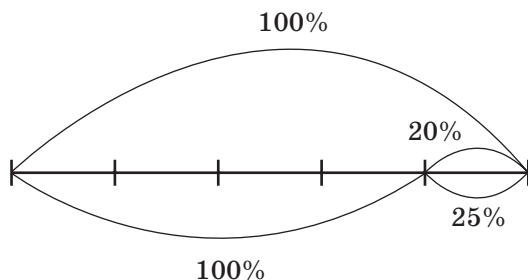
О т в е т: 3 ч.

Геометрический метод предполагает использование геометрических представлений условия задачи, т. е. геометрических моделей. В геометрическом методе предусматривается использование геометрических объектов и их свойств (сравне-

ние длин отрезков (отрезочные диаграммы), метода подобия, метода площадей (двумерные диаграммы) и т. д.). Основным преимуществом геометрического решения является возможность учащимся представить и осознать заданную ситуацию благодаря наглядности. Геометрический метод применяется тогда, когда числовые данные в задаче удобные, позволяющие начертить отрезок заданной длины.

Задача 5. Цена на товар была повышена на 25%. На сколько процентов теперь надо ее снизить, чтобы получить первоначальную цену товара?

Р е ш е н и е. Решаем данную задачу с помощью линейной диаграммы. Линейная диаграмма — это, обычно, отрезок или несколько отрезков, длины которых соответствуют численным значениям рассматриваемой величины. Свойства длины отрезка: 1) равные отрезки имеют равные длины; меньший отрезок имеет меньшую длину; 2) если точка делит отрезок на два отрезка, то длина всего отрезка равна сумме длин этих двух отрезков.

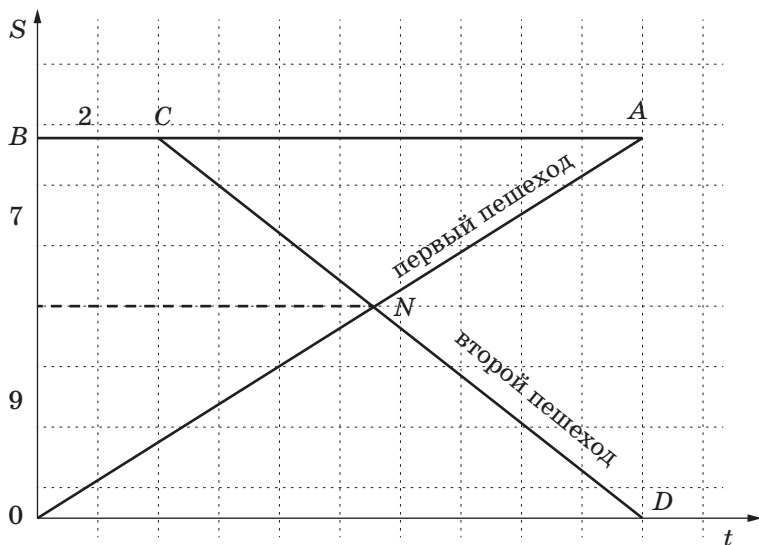


Итак, первоначальную цену товара необходимо снизить на 20%.

О т в е т: 20%.

Задача 6. Из пункта A в пункт B выходит первый пешеход, а через 2 ч навстречу ему из пункта B в пункт A выходит второй пешеход. К моменту встречи второй пешеход прошел $\frac{7}{9}$ от расстояния, пройденного к этому моменту первым пешеходом. Сколько часов требуется первому пешеходу на весь путь от A до B , если второй пешеход проходит путь от B до A за 7 ч?

Р е ш е н и е. Решим задачу геометрически. Построим траектории движения пешеходов.



Пусть первый пешеход был в пути x ч, тогда $AB = x$, а $CA = x - 2$. Второй пешеход был в пути 7 ч, значит, $OD = 7 + 2 = 9$ (ч). Из подобия треугольников ACN и ODN следует, что $\frac{CA}{OD} = \frac{7}{9}$.

Составим пропорцию: $\frac{x - 2}{9} = \frac{7}{9}$, откуда $x = 9$.

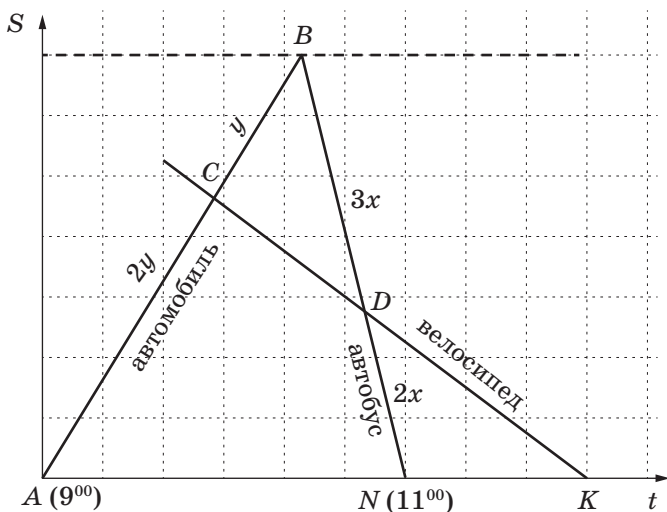
Итак, первый пешеход пройдет весь путь за 9 ч.

О т в е т: 9 ч.

Задача 7. [14] Ровно в 9:00 из пункта A в пункт B выехал автомобиль. Проехав две трети пути, наблюдательный водитель автомобиля заметил, что мимо него в сторону пункта A проехал некий велосипедист. В тот самый момент, когда автомобиль прибыл в B , из пункта B в пункт A выехал автобус. Когда до пункта A оставалось две пятых пути, не менее наблюдательный водитель автобуса заметил, что он поравнялся с тем самым велосипедистом. Во сколько приедет велосипедист в пункт A , если известно, что автобус прибыл в

пункт А ровно в 11:00? Скорости автомобиля, велосипедиста и автобуса считать постоянными.

Р е ш е н и е. Изобразим графики движения велосипеда, автомобиля и автобуса.



Применим теорему Менелая для треугольника ABN и прямой KC , получим: $\frac{AC}{CB} \cdot \frac{BD}{DN} \cdot \frac{NK}{KA} = 1$, $\frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{NK}{NK + 2}$.

Откуда следует, что $NK = 1$. Таким образом, мы получаем, что велосипедист придет в пункт А в 12⁰⁰.

О т в е т: 12⁰⁰.

К сожалению, геометрический и графический методы решения, несмотря на их высокий потенциал, не находят должного применения в школьной практике. Традиционными методами решения текстовых задач являются арифметический и алгебраический методы.

Практический метод решения называется метод, при котором поиск решения и само решение текстовой задачи выполняются с помощью непосредственных действий с предметами, о которых говорится в задаче. Практический метод решения текстовых задач применяется в младших классах.

Логический метод решения задачи представляет собой решение задачи без вычислений на основе логических рассуж-

дений. План решения задачи обычно осуществляется устно, реже письменно. К «классическим» логическим задачам относятся текстовые задачи, цель решения которых состоит в распознавании объектов или расположении их в определенном порядке в соответствии с заданными условиями. Более сложными и увлекательными типами заданий являются задачи, в которых отдельные утверждения являются истинными, а другие — ложными.

Задача 8. Министры иностранных дел России, США и Китая обсудили за закрытыми дверями проекты соглашения о частичном разоружении, представленные каждой из стран. Отвечая затем на вопрос журналистов: «Чей именно проект был принят?», министры дали такие ответы:

Россия — «Проект не наш, проект не США»;

США — «Проект не России, проект Китая»;

Китай — «Проект не наш, проект России».

Один из них (самый откровенный) оба раза говорил правду; второй (самый скрытный) оба раза говорил неправду, третий (осторожный) — один раз сказал правду, а другой раз — неправду. Определите, представителем какой страны является откровенный, скрытный и осторожный министры.

Р е ш е н и е. Для удобства записи пронумеруем высказывания дипломатов: (1) Россия — «Проект не наш», (2) «Проект не США»;

(3) США — «Проект не России», (4) «Проект Китая»;

(5) Китай — «Проект не наш», (6) Проект России».

Узнаем, кто из министров самый откровенный.

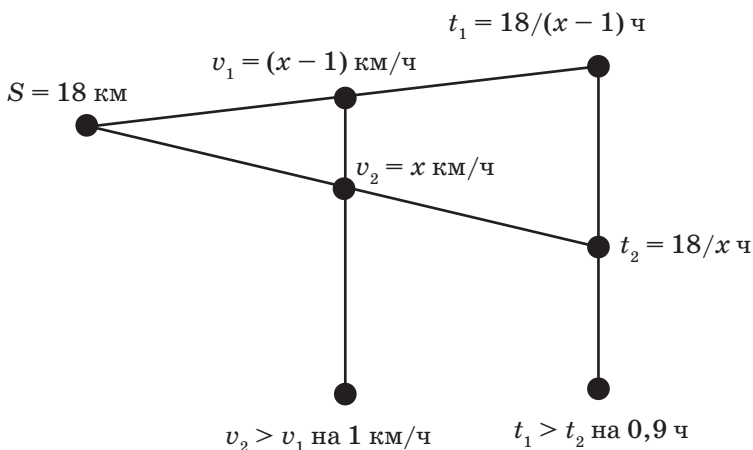
Если это российский министр, то из справедливости (1) и (2) следует, что победил китайский проект. Но тогда оба утверждения министра США тоже справедливы, чего не может быть по условию. Если самый откровенный — министр США, то тогда вновь получаем, что победил китайский проект, значит, оба утверждения российского министра тоже верны, чего не может быть по условию. Получается, что наиболее откровенным был китайский министр. Действительно, из того, что (5) и (6) справедливы, следует, что победил российский проект. Тогда получается, что из двух утверждений российского министра первое ложно, а второе верно. Оба же утверждения министра США неверны.

О т в е т: откровенным был китайский министр, осторожным — российский, скрытным — министр США.

Многие задачи могут быть решены с помощью библиотеки алгоритмов теории графов. Граф — это топологическая модель, состоящая из множества вершин и множества соединяющих их ребер. Достаточно лишь принять объекты за вершины, а связь между ними — за ребра, после чего, используя арсенал алгоритмов теории графов, можно решать задачи на нахождение маршрута от одного объекта к другому, вычисление кратчайших расстояний, задачи теории вероятностей, олимпиадной математики и др.

Задача 9. Из пункта A в пункт B , расстояние между которыми 18 км, вышли одновременно два пешехода. Один из них прибыл в пункт B на 54 мин позже, чем другой. Найдите скорость движения каждого пешехода, если известно, что скорость одного из них на 1 км/ч меньше, чем скорость другого.

Р е ш е н и е.



Пояснение по составлению графа. Так как расстояние, которое прошли пешеходы, одинаковое, то вершина — точка в графе для обоих пешеходов — будет одна. Из нее выйдут два ребра, имеющих по две смежные вершины. Отметим известные величины: над общей вершиной запишем $S = 18$ км; над смежными вершинами для каждого ребра запишем

v_1, t_1, v_2, t_2 , а также отметим зависимости: $v_2 > v_1$ на 1 км/ч и $t_1 > t_2$ на 54 мин (0,9 ч). Обращаем внимание на то, что у нас две неизвестные величины, поэтому вводим переменную x (км/ч) — скорость второго пешехода, тогда скорость первого пешехода будет равна $(x - 1)$ км/ч. Далее записываем время, затраченное на путь первым пешеходом, которое равно

$\frac{18}{x-1}$ (ч). Последнее (вертикальное) ребро указывает нам разницу во времени между пешеходами $t_1 > t_2$ на 0,9 ч. Составим уравнение и решим его: $\frac{18}{x-1} - \frac{18}{x} = \frac{9}{10}, \frac{2}{x-1} - \frac{2}{x} = \frac{1}{10},$

$x^2 - x - 20 = 0$, откуда получим: $\begin{cases} x = 5, \\ x = -4. \end{cases}$ Итак, скорость одного

из пешеходов 5 км/ч, скорость другого 4 км/ч.

О т в е т: 5 км/ч; 4 км/ч.

Четвертый этап решения текстовой задачи заключается в проверке решения задачи, в результате которого устанавливается правильность ответа на вопрос задачи. На этом этапе формируются умения: 1) осуществление контроля решения задачи; 2) оценка результатов решения задачи. Проверка решения выступает как действие самоконтроля деятельности обучающихся, служит также основой для соответствующей оценки хода и ее результата. В методике преподавания математики приводится несколько способов проверки: 1) составление и решение обратной задачи; 2) решение задачи другим способом; 3) соотнесение полученного результата и условия задачи; 4) прикидка ответа или установление его границ; 5) проверка выбора действия путем определения смысла составленных по задаче выражений [42, с. 99–100]. Решение задачи различными методами (способами) — один из способов проверки решения задачи. Следует отметить, что решение текстовой задачи различными способами позволяет убедиться не только в правильности ее решения, но дает учащемуся возможность прочнее и сознательнее запомнить материал. Поэтому целесообразно направить деятельность учащихся на поиск решения задачи разными методами (способами), их сравнение и выбор рационального решения. Выработка привычки к поиску другого способа решения задачи, умение и

способность находить различные пути и способы решения проблемы играют большую роль в будущей работе, научной и творческой деятельности.

На пятом этапе должен быть сделан вывод о выполнении требования задачи и сформулирован ответ. Приемы выполнения следующие: построение развернутого ответа на вопрос задачи с полным обоснованием (например, «так как..., то можно сделать вывод, что...»); либо представление ответа на вопрос задачи без обоснования, либо краткого ответа с помощью специальных знаков.

Многие текстовые задачи с разными сюжетами решаются по одной математической модели. Приведем пример.

Задача 10. Первая труба пропускает на 9 л воды в минуту меньше, чем вторая. Сколько литров воды в минуту пропускает первая труба, если резервуар объемом 220 л она заполняет на 9 мин дольше, чем вторая труба?	Задача 11. Два велосипедиста одновременно отправились в 220-километровый пробег. Второму ехал со скоростью на 9 км/ч больше, чем скорость первого, и прибыл к финишу на 9 ч раньше. Найдите скорость первого велосипедиста. Ответ дайте в км/ч.
Решение. Пусть первая труба пропускает в минуту x л воды, тогда вторая — $(x + 9)$ л. По условию задачи составим и решим уравнение.	Решение. Пусть скорость первого велосипедиста равна x км/ч, тогда скорость второго — $(x + 9)$ км/ч. По условию задачи составим и решим уравнение.
$\frac{220}{x} - \frac{220}{x + 9} = 9, \quad 220(x + 9 - x) = 9x(x + 9),$ $x^2 + 9x - 220 = 0, \quad x = \frac{-9 \pm \sqrt{81 + 880}}{2} = \frac{-9 + 31}{2};$ $x = -20$ — не удовлетворяет условию задачи. $x = 11$.	
Итак, первая труба пропускает в минуту 11 л воды. О т в е т: 11 л.	Итак, скорость первого велосипедиста равна 11 км/ч. О т в е т: 11 км/ч.

Умение решать текстовые задачи во многом зависит от того, насколько хорошо учащиеся умеют различать основные типы задач и решать простейшие из них. Важную роль играет опыт в решении задач. Особую актуальность в настоящее время приобретает развивающая парадигма образования, акцентирующая внимание на личностные достижения учащегося. Решение текстовых задач способствует развитию у учащихся мышления, памяти, внимания, творческого воображения, наблюдательности, последовательности рассуждения и его доказательности, развитию умения кратко, четко и правильно излагать свои мысли. Текстовые задачи обеспечивают взаимосвязь математики с настоящей жизнью ученика. Умение решать задачи является одним из основных показателей уровня развития учащихся и имеет огромное практическое значение в будущей жизни ученика.

Различные текстовые задачи входят в итоговую аттестацию по математике как профильного уровня, так и базового. Анализ результатов решения текстовых задач ЕГЭ за последние годы показал, что у учащихся с каждым годом улучшаются навыки решения задач. Текстовые задачи решают более половины участников экзамена [26]. Анализ типичных ошибок показал неумение экзаменуемых составлять математическую модель, вычислительные ошибки составляют гораздо меньшую долю. Таким образом, можно констатировать, что при сложившейся практике обучения решению текстовых задач общее умение решать задачи формируется недостаточно. В комментариях к «Методическим рекомендациям для учителей, подготовленных на основе анализа типичных ошибок участников ЕГЭ 2023 года по математике» отмечается, что уровень выполнения текстовых задач «показывает большой ресурс роста результатов, которые можно достичь путем систематической работы по решению текстовых задач как на протяжении всего обучения в школе, так и на завершающем этапе повторения».

Система педагогических умений учителя математики, необходимых для обучения учащихся решению текстовых задач, представлена в таблице 1 [18, с. 59].

Таблица 1

Прогностические умения	Умения исследовать затруднения обучающихся при изучении учебного материала и общие закономерности процесса обучения предмету, приводящие к успеху.
Проектировочные умения	Умения отобрать системы задач и располагать их в определенной последовательности таким образом, чтобы, «проведя» через их решение обучающихся, выработать у них способ мышления, позволяющий решать любые задачи из курса математики.
Конструктивные умения	Умения упрощать задачи до такого уровня, на котором они становятся доступными пониманию каждого ученика, а затем усложнять их до первоначальной сложности (данной в первоначальной формулировке).
Коммуникативные умения	Умения вызывать у детей интерес к предстоящей познавательной деятельности.
Организаторские умения	Умения организовать исследовательскую работу школьников с задачей (анализировать, упрощать, усложнять).

Рекомендации, которые позволят улучшить методику обучения решению текстовых задач учителям математики среднего звена с учетом ограниченности часов:

- выделять целый урок на решение текстовой задачи одного типа;
- заниматься решением текстовых задач в рамках внеурочной деятельности (решать нестандартные и сложные задачи);
- работать с одаренными детьми индивидуально, разбирать задачи и подготавливать их к олимпиадам.

Наблюдения за учащимися, проведенные с целью выявления особенностей организации обучения математике, показали, что у учащихся возникают трудности с управлением собственной учебно-познавательной деятельностью (недостаточно сформированы регулятивные умения). Анализ результатов анкетирования учащихся позволил сделать вывод о

том, что большинство учеников хотят, но не могут самостоятельно планировать и реализовывать собственную учебную деятельность. Для решения проблемы организации учебной деятельности при решении текстовых задач предлагается использовать специально разработанные учебные карты, способствующие формированию у учащихся *коммуникативно-познавательных и регулятивных действий при работе с учебным материалом*. Необходимо, чтобы на начальных этапах обучения работа по заданным алгоритмам была осознанно проделана обучающимися под руководством учителя, и далее алгоритм (план деятельности) применялся самостоятельно, озвучиваясь при необходимости и по просьбе учителя. Приведем примеры учебных карт.

Учебная карта 1

Прием контроля решения задачи:

- 1) проверить правильность записи условия и требования задачи (теоремы);
- 2) проверить правильность чертежа;
- 3) проверить ход решения, правильно ли использован прием решения (способ, метод);
- 4) проверить вычисления (если они есть);
- 5) проверить правильность и полноту обоснований;
- 6) рассмотрены ли частные случаи;
- 7) проведено ли исследование (если необходимо);
- 8) сформулировать идею решения;
- 9) перечислить теоретические положения, которые использовались при решении задачи;
- 10) рассказать план решения задачи.

Учебная карта 2

**План деятельности диагностики
и коррекции собственной деятельности**

- 1) зафиксировать свое внимание на ошибке и установить ее характер;
- 2) выполнить диагностику ее причин — прежде всего в умственных действиях по применению теоретических положений (определение понятий, формулировки теорем, формул и др.):
 - а) воспроизведение собственных исправленных действий;

- б) построение эталонного варианта действий по решению задачи;
 - в) сравнение собственных действий с эталонным и выявление дефектов в них;
 - г) выводы о причинах ошибок.
- 3) определить необходимость коррекционной меры;
 - 4) использовать откорректированные знания и действия в процессе решения аналогичных задач.

Преимущества работы с картами состоят в том, что у учащихся расширяются возможности самоконтроля. Отработка деятельности по картам не требует значительного времени, но их использование в учебном процессе, как показала практика, очень эффективно [29, с. 92–96].

Рекомендации учащимся

Умение решать текстовые задачи во многом зависит от того, насколько хорошо вы умеете различать основные типы задач и решать простейшие из них. Особую роль играет опыт в решении задач. Следующие рекомендации можно дать самим учащимся, чтобы решение текстовых задач было успешным.

1. Начиная решение текстовой задачи, стараться хорошо понять и осмыслить условие, определить тип задачи, изучив условие в целом и в деталях проиллюстрировать его либо грамотным и четким чертежом, либо схемой, либо чертежом и таблицей, которые будут вам лично понятны.

2. Изучить требование, которое предполагает исходная задача. Не начинать решение задачи «вслепую». Выявить верное и обоснованное направление поиска плана решения задачи, опираясь на требование задачи.

3. Высказывая предположение, постараться сразу подтвердить его рассуждениями. Предложить решение.

4. В найденном решении стремиться обосновывать каждый этап.

5. Оформить решение, не забывая, что представить решение текстовой задачи можно по-разному и в любом виде: в виде связного рассказа, в виде рисунка или схемы, в виде таблицы и т. д., обоснованно вводя различные обозначения.

6. Проверить решение.

Изучая материал, представленный в предлагаемом пособии, следует переходить к следующему вопросу только после правильного понимания предыдущего. Решенные в пособии задачи надо разбирать аккуратно, с карандашом в руке, по мере необходимости восстанавливая пропущенные выкладки. Решение многих задач приведено в кратком виде, и разбор этих решений — важный элемент самостоятельной работы. Особое внимание следует обращать на способы решения задач.

Учебное пособие поможет вам:

- изучить тему «Текстовые задачи»;
- разобрать решение типовых задач, представленных в материалах итоговой аттестации по математике;
- решить тренировочные работы, чтобы определить уровень усвоения излагаемого в пособии материала;
- решить диагностические работы;
- повторить соответствующий материал при подготовке к экзамену.

Научиться решать текстовые задачи можно только решая их.

Несколько практических советов

1. Выбор неизвестных определяется структурой и типом задачи, они должны быть естественными. Так, в задачах на движение в качестве неизвестных обычно берут скорость, время или расстояние; в задачах на работу — производительность труда, объем работы и т. д.

2. Если в условии задачи не указывается единица физической величины (длины, времени и т. п.), то эту единицу можно выбрать произвольно.

3. Следует избегать громоздких обозначений для неизвестных. Лучше использовать стандартные обозначения: x , y , z , u , v и т. д., это облегчит работу с уравнениями.

4. Во многих задачах большую роль играет разумный выбор неизвестных, упрощающий решение. Поэтому бывает полезно рассмотреть различные варианты выбора неизвестных величин. При этом не всегда та величина, значение которой нужно найти, должна фигурировать как одна из неизвестных с самого начала.

5. При составлении системы уравнений лучше сначала записать все уравнения системы в том виде, в котором они получаются из условия задачи, не преобразуя их. После этого необходимо проанализировать, что общего есть в этих уравнениях, можно ли их упростить, например, если вычесть из одного другое и т. д. При этом необходимо, по возможности, избавляться от квадратичных членов, стремясь сделать уравнения линейными. Часто удобно ввести новую переменную. Например, если переменная x во всех или почти во всех уравнениях встречается в определенной комбинации с переменной y (например, в комбинации $\frac{x}{y}$ или $x + y$), то удобно ввести новую переменную $u = \frac{x}{y}$ (соответственно $u = x + y$).

6. Если число уравнений меньше числа неизвестных, то обычно бывает невозможно найти неизвестное. В этом случае следует попытаться либо вывести из условия задачи дополнительные уравнения, либо исключить из полученных уравнений некоторые неизвестные, либо ввести новые переменные, равные подходящим комбинациям исходных переменных. Если использованы все условия задачи, то нужное неизвестное или комбинация неизвестных обязательно найдутся.

7. Единицы измерения в математике носят одно общее название — единицы измерения физических величин. Самыми популярными единицами измерения, которые используются в математике, являются единицы длины, массы, времени, скорости. Для физической величины существует несколько единиц измерения. Необходимо помнить, что единицы измерения всех величин, используемых в численных расчетах при решении задачи, должны быть едиными.

Предлагаемые в пособии задачи могут быть решены разными методами. Важно уметь выбрать наиболее удобный и понятный метод решения.

ГЛАВА 1. ЗАДАЧИ НА ДВИЖЕНИЕ

Основными компонентами этого типа задач являются:

1) пройденный путь S ; 2) скорость v ; 3) время t . Зависимость между указанными величинами выражается известными формулами:

$$S = v \cdot t; \quad v = \frac{S}{t}; \quad t = \frac{S}{v}.$$

Указанные величины должны быть в одной системе единиц.

А л г о р и т м р е ш е н и я обычно сводится к следующему:

а) выбирается одна из величин, которая по условию задачи является неизвестной, и обозначается через x , y , z и т. д.;

б) устанавливается, какая из величин является по условию задачи известной;

в) третья (из оставшихся) величина выражается через неизвестную и известную с помощью одной из формул;

г) составляется уравнение на основании условия задачи, в котором указано, как именно изменилась третья величина.

В задачах на движение весьма полезно составить иллюстративный чертеж. Этот чертеж нужно сделать таким, чтобы на нем была видна динамика движения, со всеми встречами, остановками и поворотами. Хорошо составленный чертеж позволяет понять содержание задачи, не заглядывая в ее текст.

Основные виды задач на движение:

1) задачи на движение по прямой (навстречу и вдогонку);

2) задачи на движение по замкнутой трассе;

3) задачи на движение по реке;

4) задачи на среднюю скорость;

5) задачи на движение протяженных тел.

При решении задач на движение принимают некоторые допущения.

1. Движение считаем равномерным, если нет специальных оговорок.

2. Если расстояние между двумя пунктами не задано, иногда удобно считать его равным 1.

3. При решении задач на движение двух тел часто очень удобно считать одно тело неподвижным, а другое — прибли-

жающимися к нему со скоростью, равной сумме скоростей этих тел (при движении навстречу) или разности скоростей этих тел (при движении вдогонку). Такая модель помогает получить нужные уравнения и в задачах на движение «вдогонку», и по замкнутой трассе (окружности):

а) если два тела со скоростями x и y движутся навстречу друг другу, то время, через которое они встретятся, равно

$$\frac{S}{x + y}, \text{ где } S — \text{ начальное расстояние между телами;}$$

б) если тело, движущееся со скоростью x , догонит тело, движущееся со скоростью y , то время, за которое первое тело догонит второе, равно $\frac{S}{x - y}$, где S — начальное расстояние между телами.

4. В задачах на движение по реке необходимо учитывать скорость течения реки. Если тело с собственной скоростью x движется по реке, скорость течения которой y , то скорость движения тела по течению равна $x + y$, а против течения $x - y$. Если же в задачах говорят о движении плота, то полагают, что он движется со скоростью течения.

5. При одновременном движении пройденные расстояния прямо пропорциональны скоростям: $\frac{S_1}{S_2} = \frac{v_1}{v_2}$.

6. При движении на одно расстояние — время движения обратно пропорционально скорости: $\frac{t_1}{t_2} = \frac{v_2}{v_1}$.

7. Чаще всего в задачах на движение описывается движение двух участников, которые не всегда одновременно начинают движение и не всегда одновременно его заканчивают. Поэтому очень важно выделить участок или участки пути, на которых движение происходит действительно совместно. Кроме этого, в задачах имеются, как правило, такие участки пути, на которых передвигается один участник, в то время как другой еще не начал или уже закончил движение. В некоторых задачах полезно найти скорость сближения (или удаления) участников — величину, показывающую, на сколько уменьшается (или увеличивается) расстояние между участниками движения в единицу времени.

При анализе условия задач на движение необходимо сразу выделять такие стандартные ситуации, как

- одновременное движение (встречное и в одном направлении);
- движение на одно расстояние;
- движение по течению или против течения реки;
- задачи на движение протяженных тел;
- задачи на движение по замкнутой трассе;
- задачи на определение средней скорости движения.

1.1. Движение из одного пункта в другой в одном направлении

Задачи на движение из одного пункта в другой в одном направлении называют еще задачами вдогонку. Пусть расстояние между телами равно S и они движутся по прямой в одну сторону со скоростями v_1 и v_2 соответственно ($v_1 > v_2$) так, что первое тело следует за вторым. Время t , через которое первое тело догонит второе, находится по формуле

$$t = \frac{S}{v_1 - v_2}.$$

Задача 12. Первый турист, проехав 1,5 ч на велосипеде со скоростью 16 км/ч, делает остановку на 1,5 ч, а затем продолжает путь с первоначальной скоростью. 4 ч спустя после отправки в дорогу первого туриста вдогонку ему выезжает на мотоцикле второй турист со скоростью 56 км/ч. Какое расстояние они проедут, прежде чем второй турист догонит первого?

Решение. Пусть x (км) — расстояние до места встречи. Тогда $\frac{x}{16}$ (ч) — время, которое первый турист затрачивает на преодоление расстояния до встречи, $\frac{x}{56}$ (ч) — время, за которое второй турист проезжает это расстояние. Так как первый турист сделал остановку на 1,5 ч, а второй турист отправился в путь спустя 4 ч после первого, то второй турист находился в пути на 2,5 ч меньше первого. По условию задачи составим и решим уравнение:

$$\frac{x}{16} - \frac{x}{56} = 2,5, \quad 40x = 2240, \quad x = 56.$$

Итак, второй турист догонит первого на 56 км.

О т в е т: 56 км.

Р е ш е н и е 2.

1) $16 \cdot 2,5 = 40$ (км) — расстояние между туристами;

2) $\frac{40}{56 - 16} = \frac{40}{40} = 1$ (ч) — за 1 ч второй турист догонит пер-

вого;

3) $56 \cdot 1 = 56$ (км) проедут туристы.

О т в е т: 56 км.

Задача 13. Расстояние между городами A и B равно 630 км. Из города A в город B выехал автомобиль, а через 2 ч следом за ним со скоростью 60 км/ч выехал мотоциклист, догнав автомобиль в городе C и повернул обратно. Когда он вернулся в A , автомобиль прибыл в B . Найдите расстояние от A до C . Ответ дайте в километрах.

Р е ш е н и е. Пусть скорость автомобиля x (км/ч), за 2 ч он пройдет расстояние $2x$ (км). Мотоцикл догонит автомобиль через $\frac{2x}{60 - x}$ (ч). Тогда на весь путь в 630 км автомобиль затратил $\left(2 + 2 \cdot \frac{2x}{60 - x}\right)$ (ч).

Составим уравнение: $\left(2 + 2 \cdot \frac{2x}{60 - x}\right) \cdot x = 630$.

Решив уравнение, получим $x = 45$ (км/ч).

Мотоциклист до встречи с автомобилем в пункте C затратил в пути 6 ч, а автомобиль — 8 ч. Таким образом, расстояние между пунктами A и C равно 8 (ч) $\cdot 45$ (км) = 360 км.

О т в е т: 360 км.

Задача 14. Первый велосипедист выехал из поселка по шоссе со скоростью 12 км/ч. Через 1 ч после него со скоростью 10 км/ч из того же поселка в том же направлении выехал второй велосипедист, а еще через 1 ч после этого — третий. Найдите скорость третьего велосипедиста, если сначала он догнал второго, а через 2 ч 45 мин после этого догнал первого. Ответ дайте в км/ч.

Р е ш е н и е. Пусть скорость третьего велосипедиста x (км/ч). Третий велосипедист догнал второго через $\frac{10}{x-10}$ (ч), а первого велосипедиста через $\frac{24}{x-12}$ (ч). Так как по условию задачи третий велосипедист догнал первого через 2 ч 45 мин после того, как догнал второго, составим и решим уравнение $\frac{10}{x-10} + \frac{11}{4} = \frac{24}{x-12}$. После преобразований получим квадратное уравнение $11x^2 - 298x + 1800 = 0$, где $x = 18$ или $x = \frac{100}{11}$.

С учетом $x > 12$ условию задачи удовлетворяет $x = 18$. Таким образом, скорость третьего велосипедиста 18 км/ч.

О т в е т: 18 км/ч.

1.2. Движение из разных пунктов навстречу друг другу, из одного пункта в диаметрально противоположных направлениях

Если расстояние между телами равно S и они движутся по прямой навстречу друг другу со скоростями v_1 и v_2 , то время t , через которое они встретятся, находится по формуле

$$t = \frac{S}{v_1 + v_2}.$$

При решении задач на встречное движение очень важно понимать, что если два тела вышли одновременно навстречу друг другу, то до встречи они будут в пути одинаковое время и пройдут все расстояние. В таких задачах два тела могут начинать движение навстречу друг другу: 1) одновременно; 2) в разное время.

При решении задач на движение в противоположных направлениях необходимо помнить, что при таком движении расстояние между движущимися телами увеличивается. В таких задачах два тела могут начинать движение в противоположных направлениях из одной точки:

1) одновременно; 2) в разное время.

Задача 15. В один и тот же час навстречу друг другу должны были выйти первый турист из пункта A и второй турист из пункта B . Но первый турист задержался и вышел позже

на 6 ч. При встрече выяснилось, что первый турист прошел на 12 км меньше, чем второй. Отдохнув, они одновременно покинули место встречи и продолжили путь с прежней скоростью. В результате первый турист пришел в пункт B через 8 ч, а второй турист пришел в пункт A через 9 ч после встречи. Определите расстояние AB и скорости пешеходов.

Решение. Пусть x (км/ч) — скорость первого туриста, а y (км/ч) — скорость второго туриста. Тогда $8x$ (км) — путь, пройденный первым туристом от места встречи до пункта B , а $9y$ (км) — путь, пройденный вторым туристом от места встречи до пункта A . $\frac{9y}{x}$ (ч) — время, которое затратил первый турист на путь из пункта A до встречи; $\frac{8x}{y}$ (ч) — время, которое затратил второй турист на путь из пункта B до встречи.

Из условия задачи следует, что $8x - 9y = 12$ — первое уравнение.

Так как второй турист вышел раньше, чем первый, на 6 ч, то составим второе уравнение: $\frac{8x}{y} - \frac{9y}{x} = 6$.

Запишем систему уравнений:

$$\begin{cases} 8x - 9y = 12, \\ \frac{8x}{y} - \frac{9y}{x} = 6; \end{cases} \quad \begin{cases} 8x - 9y = 12, \\ 8x^2 - 9y^2 - 6xy = 0. \end{cases}$$

Выразим y через x из первого уравнения системы $y = \frac{8x - 12}{9}$

и подставим во второе: $8x^2 - 9\left(\frac{8x - 12}{9}\right)^2 - 6x\left(\frac{8x - 12}{9}\right) = 0$.

После несложных преобразований получим квадратное уравнение

$$5x^2 - 33x + 18 = 0, \quad \begin{cases} x_1 = 6, \\ x_2 = 0,6. \end{cases}$$

Найдем y : $y_1 = \frac{8 \cdot 6 - 12}{9} = \frac{48 - 12}{9} = 4$,

$$y_2 = \frac{8 \cdot 0,6 - 12}{9} = -0,8 \text{ — не удовлетворяет условию за-}$$

дачи. Следовательно, 6 км/ч — скорость первого туриста, 4 км/ч — скорость второго туриста. Расстояние между пунктами A и B равно $8 \cdot 6 + 9 \cdot 4 = 84$ (км).

О т в е т: 84 км; 6 км/ч; 4 км/ч.

Задача 16. Два поезда отправились навстречу друг другу из пунктов A и B , расстояние между которыми 180 км. Через 2 ч они встретились и, не останавливаясь, продолжали путь с той же скоростью. Первый поезд прибыл в пункт на 54 мин раньше, чем второй поезд в пункт B . Вычислите скорость каждого поезда.

Р е ш е н и е. Так как расстояние между пунктами A и B равно 180 км и поезда встретились через 2 ч, то скорость сближения равна 90 км/ч. Пусть скорость первого поезда равна x (км/ч), тогда скорость второго равна $(90 - x)$ (км/ч). Так как первый поезд прибыл на 54 мин раньше второго, соста-

вим и решим уравнение: $\frac{180}{x} + \frac{9}{10} = \frac{180}{90 - x}$, $\frac{20}{x} + \frac{1}{10} = \frac{20}{90 - x}$,

$x^2 + 310x - 18000 = 0$, $x = 50$ или $x = -360$ (не удовлетворяет условию задачи).

Итак, скорость первого поезда 50 км/ч, а скорость второго — 40 км/ч.

О т в е т: 50 км/ч, 40 км/ч.

Задача 17. Два туриста отправляются из одного и того же места на прогулку до опушки леса, находящегося на 2,8 км от места отправления. Один идет со скоростью 3,6 км/ч, а другой — со скоростью 4,8 км/ч. Дойдя до опушки, второй с той же скоростью возвращается обратно. На каком расстоянии от точки отправления произойдет их встреча?

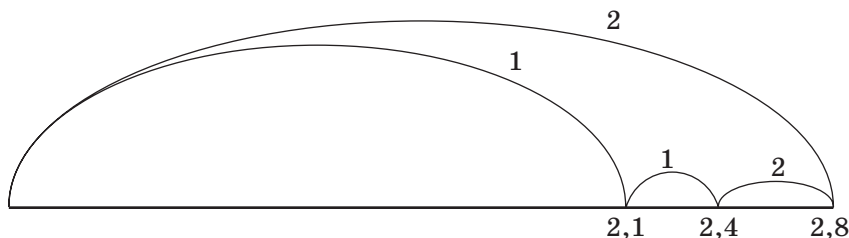
Р е ш е н и е 1. Так как второй турист, движущийся с большей скоростью, доходит до опушки, а затем возвращается обратно, то туристы далее движутся навстречу друг другу. Переформулируем условие задачи. Представим, что между туристами 5,6 км и они движутся навстречу друг другу. На-

ходим время, через которое они встретятся: $\frac{5,6}{8,4} = \frac{2}{3}$ (ч), да-

лее находим, на каком расстоянии от точки отправления они встретятся: $\frac{2}{3} \cdot 3,6 = 2,4$ (км).

О т в е т: 2,4 км.

Р е ш е н и е 2. Решим задачу геометрически. На горизонтальной оси откладываем расстояние от места отправления до опушки: 1 клетка = 0,1 км. Скорость первого туриста составляет $\frac{3}{4}$ скорости второго. Следовательно, первый турист проходит $\frac{3}{4}$ пути от места отправления до опушки, т. е. 2,1 км, а второй доходит до опушки. Затем они начинают двигаться навстречу друг другу. Первый турист проходит до встречи $\frac{3}{7}$ ч пути, а второй — $\frac{4}{7}$. Итак, туристы встретятся на расстоянии 0,4 км от опушки и на расстоянии 2,4 км от точки отправления.



О т в е т: 2,4 км.

Задача 18. Два пешехода одновременно и по одному маршруту вышли из пунктов A и B навстречу друг другу. После того, как они встретились в пункте C , один дошел за 9 мин до пункта B , а другой за 1 мин до пункта A . Определить время в пути каждого, считая их скорости постоянными.

Р е ш е н и е. Обозначим через x (мин) время до встречи, v_1 (м/мин) — скорость первого пешехода, v_2 (м/мин) — скорость второго пешехода.

Имеем: $v_1 \cdot x = v_2 \cdot 1$ — путь, который первый пешеход прошел до встречи, а второй — после встречи, $\frac{v_1}{v_2} = \frac{1}{x}$;

$v_2 \cdot x = v_1 \cdot 9$ — путь, который второй пешеход прошел до встречи, а первый, после встречи, — $\frac{v_1}{v_2} = \frac{x}{9}$.

Тогда: $\frac{1}{x} = \frac{x}{9}$, откуда $x^2 = 9$, $x = 3$.

Итак, $3 + 9 = 12$ (мин) — время в пути первого пешехода, $3 + 1 = 4$ (мин) — время в пути второго пешехода.

О т в е т: 12 мин; 4 мин.

Задача 19. Из пункта A в пункт B со скоростью 80 км/ч выехал первый автомобиль, а через некоторое время с постоянной скоростью — второй. После остановки на 20 мин в пункте B второй автомобиль поехал с той же скоростью назад. Через 48 км он встретил первый автомобиль, шедший навстречу, и был на расстоянии 120 км от B в тот момент, когда в пункт B прибыл первый автомобиль. Найдите расстояние от A до места первой встречи автомобилей, если $AB = 480$ км.

Р е ш е н и е. Обозначив расстояние от A до места первой встречи автомобилей — S км, а скорость второго автомобиля — v км/ч, увидим, что 72 км ($120 - 48 = 72$) второй автомобиль пройдет за то же время, которое понадобится первому автомобилю, чтобы преодолеть 48 км. Следовательно, $\frac{72}{v} = \frac{48}{80}$, откуда $v = 120$ (км/ч). От места первой встречи до пункта B первому автомобилю останется пройти $(480 - S)$ км со скоростью 80 км/ч. На это он затратил $\frac{480 - S}{80}$ ч. За это же время второй автомобиль прошел от места первой встречи (от места обгона) до пункта B , потратил $\frac{1}{3}$ ч на стоянку в пункте B и еще $\frac{120}{v}$ ч на то, чтобы отъехать от B на 120 км.

Таким образом, составим уравнение:

$$\frac{480 - S}{80} = \frac{480 - S}{v} + \frac{1}{3} + \frac{120}{v}.$$

Из него, зная, что $v = 120$, находим $S = 160$ (км).

Итак, расстояние от A до места первой встречи автомобилей составляет 160 км.

О т в е т: 160 км.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	3
Методические особенности решения текстовых задач.....	4
Рекомендации учащимся	29
Глава 1. Задачи на движение	32
1.1. Движение из одного пункта в другой в одном направлении	34
1.2. Движение из разных пунктов навстречу друг другу, из одного пункта в диаметрально противоположных направлениях	36
1.3. Задачи, в которых единственной известной величиной является время, а пройденный путь принят за единицу	41
1.4. Задачи, в которых скорость выражена косвенно через время	43
1.5. Движение по замкнутой трассе	43
1.6. Нахождение средней скорости.....	47
1.7. Задачи на движение, решаемые с помощью неравенств.....	49
1.8. Сложение скоростей.....	49
1.9. Движение протяженных тел	52
1.10. Задачи на движение, в которых число неизвестных превышает число уравнений	55
Задачи для самостоятельного решения	56
Глава 2. Задачи на совместную работу	65
2.1. Вычисление неизвестного времени работы	65
2.2. Задачи о бассейне, который одновременно наполняется разными трубами.....	69
Задачи для самостоятельного решения	72
Глава 3. Задачи на планирование	78
3.1. Задачи, в которых требуется определить объем выполненной работы	78
3.2. Задачи, в которых требуется найти производительность труда.....	80

3.3. Задачи, в которых требуется определить время, затраченное на выполнение предусмотренного объема работы	81
3.4. Задачи, в которых вместо времени выполнения некоторой работы дано число рабочих, участвующих в ней	82
Задачи для самостоятельного решения	82
Глава 4. Задачи на проценты	86
4.1. Проценты в повседневной жизни	93
Задачи для самостоятельного решения	97
4.2. Задачи на смеси, растворы, сплавы	110
Задачи для самостоятельного решения	122
Глава 5. Задачи на зависимость между компонентами арифметических действий.....	127
5.1. Задачи, в которых требуется найти неизвестные, каждое из которых составляет ту или иную часть искомой суммы.....	127
5.2. Задачи, в которых используется формула двузначного числа	128
5.3. Задачи, в которых неизвестные являются членами прогрессии	130
5.4. Задачи, в которых слагаемые пропорциональны некоторым числам.....	131
Задачи для самостоятельного решения	132
Литература	139
Приложение. Текстовые задачи на итоговой аттестации.....	143
Ответы	156