Е.Л. Ситкин

Экспресс-обучение решению задач по стереометрии

10–11 классы

2-е издание, дополненное

Москва
ИЛЕКСА
2025

УДК 372.8:514.113
ББК 22.151.0+74.262
С41

Р е ц е н з е н т ы:
В.А. Лазарев, доктор педагогических наук,
А.М. Шелехов доктор физ.-мат. наук,
С.Г. Слободник, кандидат физ.-мат наук, учитель школы
№ 179 г. Москвы

Ситкин Е.Л.
С41 Экспресс-обучение решению задач по стереометрии: 10–11 классы. — 2-е изд, доп. — М.: ИЛЕКСА, 2025. — 78 с.
ISBN 978-5-89237-754-6

Предлагаемое пособие представляет собой практикум по решению задач на построение сечений и вычисление площадей сечений, на вычисление расстояний и углов в пространстве с помощью специально разработанной методики, использующей векторы и координаты. Пособие, несомненно, вызовет интерес у учащихся старших классов и их учителей, так как помогает быстро научить решать задачи сложного уровня ЕГЭ и внутренних олимпиад ведущих вузов. В издании приведено решение большого количества задач, иллюстрирующих данную методику, и представлен набор задач для проведения самостоятельных и контрольных работ.

УДК 372.8:514.113
ББК 22.151.0+74.262

ISBN 978-5-89237-754-6

ОГЛАВЛЕНИЕ

Посвящается основателям династии
учителей математики:
моему деду, Евдокимову Петру Михайловичу,
и маме, Евдокимовой Валентине Петровне

Введение

Одной из главных задач современного школьного образования является вовлечение учащихся в самостоятельную деятельность при консультативной роли учителя. В изучении геометрии это особенно важно, так как для приобретения школьником необходимых навыков занятий в классе недостаточно, нужна глубокая заинтересованность предметом и желание двигаться вперед, несмотря на неудачи. Наша многолетняя работа с учащимися позволила существенно минимизировать понятийный аппарат таких практических разделов стереометрии как решение задач на вычисление расстояний и углов в пространстве, построение сечений и вычисление площадей сечений. Аппарат опирается только на элементарные школьные знания, простые арифметические действия и доступен большинству школьников, что позволяет им самостоятельно проработать большое количество предметного материала.

Методика апробирована и, как показывает опыт, ее применение позволило учителям ликвидировать пробелы в преподавании геометрии (даже те, которые известны еще с середины прошлого столетия и появились в результате отмены письменного школьного экзамена).

Конечно, не все учащиеся станут профессиональными математиками, но если предлагаемая методика позволит им решать пространственные задачи — это в жизни, несомненно, пригодится. Кем бы выпускники школ потом не стали: инженерами, конструкторами или технологами.

Вовлечение детей в самостоятельную деятельность процесс достаточно сложный и неоднородный. Кто-то начинает увлекаться геометрией с 8 или 9 класса, кто-то в более поздние сроки: в частности, многое зависит от того, насколько мозг ребенка, в силу возрастных особенностей, способен воспринимать потоки сложной информации. Именно это мы и учитывали в методологии. Раннее начало обеспечивает более широкие возможности учителю и ученику. Данное пособие представляет собой практикум по решению задач. В рамках нашего курса учащиеся приобщаются к стереометрии уже в 9 классе. Добавляя в программу на начальном этапе специально разработанные, упрощенные элементы аналитической геометрии, мы в достаточно короткие сроки добиваемся от школьников решений задач методами, не требующими ни знания принципиально важных теорем стереометрии, ни развитых пространственных представлений; но при этом охватывается значительный курс школьной стереометрии. В скором времени мы дополняем полученные навыки решения задач программным материалом и постепенно подводим учащихся к решению задач традиционными методами. Опыт показывает, что когда проблема уже решена, и ученик находится в более спокойном состоянии, то ему проще найти общепринятое решение, которое иногда бывает еще изящнее и короче.

Задачи в пособии подобраны таким образом, что предыдущий материал отрабатывается в последующих главах, в результате чего не до конца отработанные действия постепенно становятся свернутыми во времени.

Данное пособие — это не руководство к действию для школьных учителей математики, а изложение нашего опыта в преподавании геометрии, который может помочь учителю на разных этапах обучения.

И! Что особенно важно! Школьники, не обладающие пространственным воображением, применяя технику решения задач, демонстрируемую в нашем пособии, развивают в короткие сроки свое пространственное мышление и в дальнейшем переходят к решению задач классическими методами.

Особую благодарность мы выражаем С.Г. Слободнику, учителю математики школы № 179 г. Москвы, за новые подходы к решению задач на отношение отрезков в пространстве, оказавшиеся актуальными и при решении сложных задач на плоскости по той же тематике. Метод решения задач на построение сечений многогранников, представленный в данном пособии, можно с полным правом назвать «Методом Слободника», что и было зафиксировано в статье журнала «Математика в школе» за 2016 г. № 6.

Часть 1

Деление отрезков на плоскости и в пространстве в заданном отношении

А) Деление отрезков на плоскости в заданном отношении

С уже достаточно сложной стереометрией мы стараемся знакомить учащихся с 9 класса, когда изучено уравнение прямой. Начиная с задач на деление отрезков в плоских фигурах, мы впоследствии показываем аналогичный метод в пространстве при построении сечений.

Необходимые теоретические сведения

Дана прямая a и отрезок CD. Пусть прямая задана уравнением $ax + by + c = 0$. Левая часть представляет собой линейную функцию от двух переменных x и y,

$$f(x, y) = ax + by + c.$$

Значение функции $f(x, y)$ в точке $M(x, y)$ будем обозначать $f(M)$ и называть *индексом* точки M относительно прямой a.

Справедлива следующая важная

Теорема. *Точки $C(x_1, y_1)$ и $D(x_2, y_2)$ находятся по разные стороны от прямой а тогда и только тогда, когда $f(C)$ и $f(D)$ имеют разные знаки (рис. 1);*

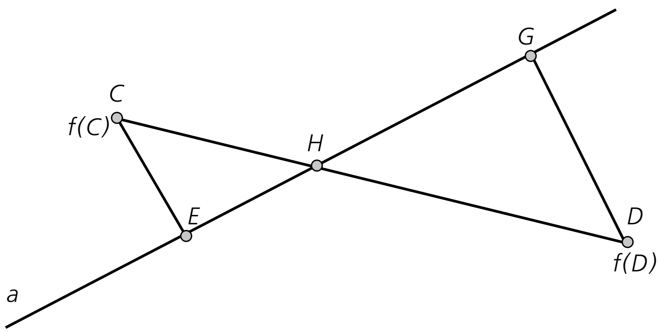

Рис. 1

точки $C(x_1, y_1)$ и $D(x_2, y_2)$ находятся по одну сторону от прямой а тогда и только тогда, когда $f(C)$ и $f(D)$ имеют одинаковые знаки (рис. 2).

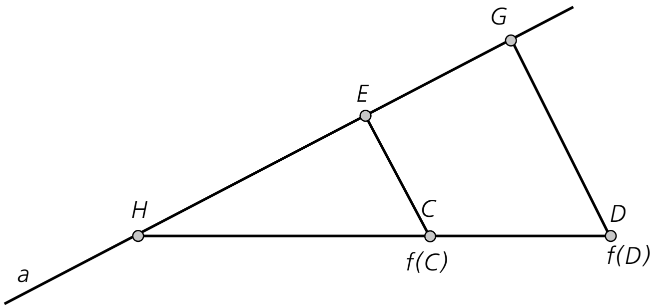

Рис. 2

Точка $H(x_3, y_3)$ лежит на прямой a тогда и только тогда, когда $f(H)=0$.

Данные выводы являются следствием того, что непрерывная функция $f(x, y)$ при переходе через ноль меняет свой знак.

Утверждение 1. *При любом расположении точек C и D относительно прямой a, справедливы следующие равенства*

$$\frac{|CH|}{|DH|}=\frac{|f(C)|}{|f(D)|}=\frac{|CE|}{|DG|}$$, где $f(C) = ax_1 + by_1 + c$ и $f(D) = ax_2 + by_2 + c$.

Данные выводы учащийся может проверить опытным путем. Доказательство этого и последующего факта учитель может привести позже. Опыт показывает, что учащиеся легко усваивают доказательства после того, как метод решения задач применяется свободно.

Доказательство. *Действительно, пусть точки C и D имеют координаты $C(x_1, y_1)$, $D(x_2, y_2)$. Так как треугольники CEH и DGH подобны, то $|CH| : |DH| = |CE| : |DG|$.*

Расстояния от этих точек до прямой a соответственно равны $\rho(C)=|CE|=\dfrac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ и $\rho(D)=|DG|=\dfrac{|ax_2+by_2+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

При подстановке этих значений в пропорцию мы получаем искомое отношение.

Замечание 1. *Точки, лежащие по одну сторону от прямой и удаленные от нее на равные расстояния, имеют равные индексы (рис. 3). В данном примере $f(D) = f(K)$.*

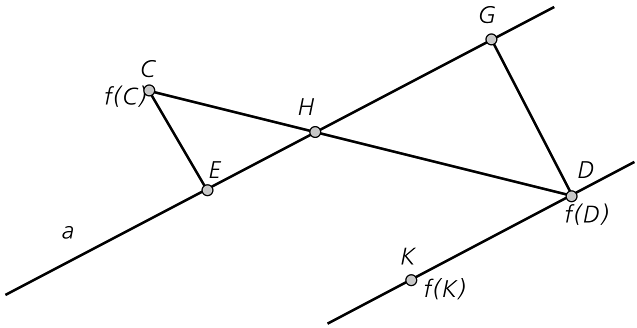

Рис. 3

Замечание 2. *Коэффициенты a, b, c в уравнении прямой a можно пропорционально увеличить или уменьшить так, что индекс произвольной точки, не лежащей на этой прямой, станет равным произвольно выбранному числу.*

Утверждение 2. *Пусть точки A, B, C, D таковы, что $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.*

Тогда $f(B) - f(A) = f(D) - f(C)$.

Доказательство. *Пусть $A(x_0, y_0)$, $\overrightarrow{AB}(\alpha, \beta)$. Тогда $B(x_0 + \alpha, y_0 + \beta)$. Следовательно, $f(A) = ax_0 + by_0 + c$, $f(B) = a(x_0+\alpha)+b(y_0+\beta)+c$ и $f(B) - f(A) = a\alpha+b\beta$. Аналогично получаем соотношение $f(D) - f(C) = a\alpha+b\beta$. Таким образом, разности индексов конца и начала равных векторов равны.*

Данные сведения позволяют решать класс достаточно сложных задач по планиметрии на отношение отрезков.

Пример 1. В треугольнике ABC точки E, F, D делят стороны в отношении $5 : 2$, $3 : 1$, $1 : 1$ соответственно (рис. 4). Найти отношение отрезков $DG : GA$ и $EG : GF$.

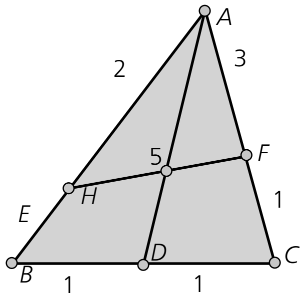

Рис. 4

Решение: а) Условимся, что прямая EF пересекает отрезок DA, тогда индекс точек E, G, F относительно прямой EF равен нулю. Примем индекс точки A за 5, тогда индекс точки B будет -2, а точки C $-\frac{5}{3}$ (рис. 5). Если мы найдем индекс точки D, то найдем отношение отрезков $DG : GA$. Примем индекс точки D за x. Поскольку $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{DC}$, то согласно утверждению 2, $x - (-2) = -\frac{5}{3} - x$, откуда $2x = -\frac{5}{3} - 2 = -\frac{11}{3}$, $x = -\frac{11}{6}$, а значит, индекс точки D равен $-\frac{11}{6}$. Искомое отношение $\frac{11}{6} : 5$ или $11 : 30$.

б) Теперь условимся, что прямая DA пересекает отрезок EF. Расставим индексы точек на чертеже (рис. 6). Индексы точек D, G, A равны нулю, тогда индексы точек F, C и B равны 3, 4 и -4 соответственно. Найдя индекс точки E, найдем отношение отрезков $EG : GF$. В четырех единицах на отрезке AB умещаются семь равных частей, а одна часть будет занимать $-\frac{4}{7}$. Индекс точки E составляет 5 частей, значит, он равен $-\frac{20}{7}$. Искомое отношение отрезков $EG : GF = \frac{20}{7} : 3 = 20 : 21$.

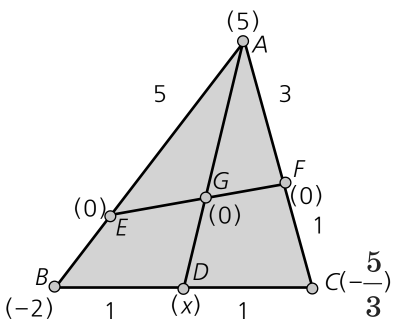

Рис. 5

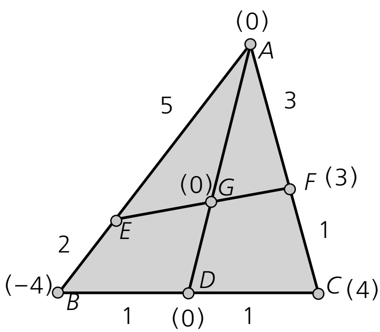

Рис. 6

Индекс точки E можно найти и через составление уравнения $\frac{5}{2}\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{EA}=0$, приняв его за x.

Для отработки техники решения мы предлагаем учащимся похожие задачи. Например, рис. 7, 8, 9.

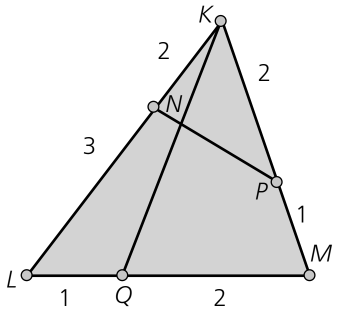

Рис. 7

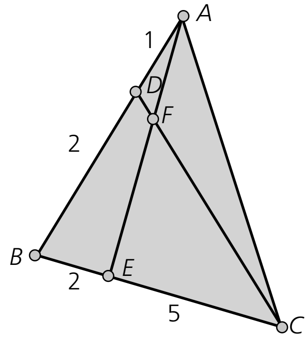

Рис. 8

Задачу к рис. 9 предпочтительнее решать традиционным способом. Решение сразу просматривается, если через точку A провести прямую, параллельную основанию BC и рассмотреть пары подобных треугольников. Учащийся должен уметь выбирать более рациональные подходы.

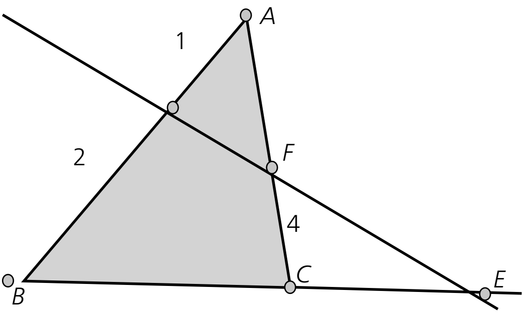

Рис. 9

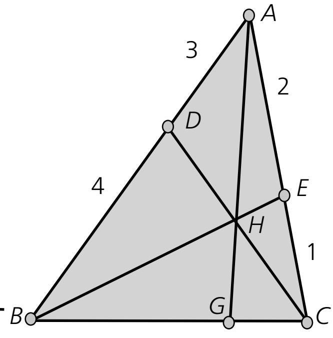

Рис. 10

В задаче к рис. 10 надо найти, в каком отношении чевиана делит основание BC. Конечно, зная теорему Чевы данную проблему решить легко, но учащиеся должны научиться применять новую технику в различных ситуациях. Это поможет и в сложной планиметрии, и при решении про-

Б) Стереометрия. Вводный курс

Деление отрезков в пространстве в заданном отношении

Применение техники решения с определением индексов точек уже в 9 классе напрашивается для решения пространственных задач на построение сечений многогранников. Причем данная техника более предпочтительна в стереометрии, чем в планиметрии. Дети, чьи пространственные представления развиты слабо, легко строят сечения, причем при достаточно сложных математических условиях.

В 9 классе данный курс мы начинаем внедрять с учетом индивидуальных особенностей учащихся и в большей степени целью является отработка техники решений на пространственных объектах.

Необходимые теоретические сведения

Учащиеся должны принять к сведению, что техника решения задач на отношение отрезков в пространстве с определением индексов точек аналогична той, что применялась на плоскости. Роль секущей прямой теперь выполняет плоскость, причем сохраняются такие же утверждения и замечания, что описаны в пункте А). Но так как мы уже выходим в пространство, то учащиеся должны принять еще и аксиому, что *через три точки можно провести плоскость и притом только одну*. Наглядное осознание данного факта учащиеся могут представить на примере стульев на трех и четырех ножках разной длины.

Этого для решения задач на отношение отрезков в пространстве уже бывает достаточно, но учитель в дальнейшем обязан пояснить учащимся теоретический материал с применением уравнения плоскости, когда они будут к этому готовы.

Все рассуждения аналогичны тем, что мы привели ранее, только в пространственном случае добавляется третья координата. Здесь мы приведем наиболее важные с нашей точки зрения факты.

Дан отрезок M_1M_2, пересекающий плоскость α (рис. 29). Плоскость задана уравнением $ax + by + cz + d = 0$. Составим функцию от переменных x, y и z. $f(x, y, z) = ax + by + cz + d$.

Теорема. *При подстановке координат точек $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ в функцию ее значения $f(M_1)$, $f(M_2)$ будут иметь разные знаки.*

Утверждение 1. *Если отрезок M_1M_2 пересекает плоскость α, заданную уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$, в точке L, то отношение длин отрезков равно $\frac{|M_1L|}{|M_2L|} = \frac{|f(M_1)|}{|f(M_2)|}$, где $f(M_1) = Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D$ и $f(M_2) = Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D$.*

Действительно, на рис. 18 треугольники M_1TL и M_2OL подобны и $|M_1L| : |M_2L| = |M_1T| : |M_2O|$. Пусть точки M_1 и M_2 имеют координаты $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, x_2)$, тогда расстояние от этих точек до плоскости α соответственно равны $\rho(M_1) = |M_1T| = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$ и $\rho(M_2) = |M_2O| = \frac{|Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$. При подстановке этих значений в пропорцию и получаем искомое отношение.

Так же как и в случае задач на плоскости, функцию от точки заменим термином ***индекс точки*** *относительно плоскости.*

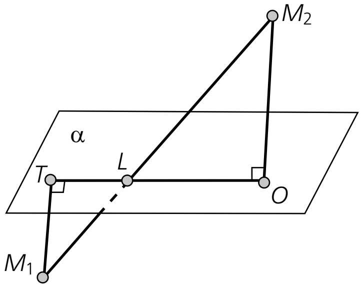

Рис. 29

Замечание 1. *Точки, лежащие по одну сторону от плоскости и удаленные от нее на равные расстояния, имеют равные индексы.*

Замечание 2. *Коэффициенты a, b, c, d в уравнении плоскости можно пропорционально увеличить или уменьшить так, что индекс произвольной точки, не лежащей в этой плоскости, станет равным произвольно выбранному числу.*

Утверждение 2. *Пусть точки A, B, C, D таковы, что $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. Тогда $f(B) - f(A) = f(D) - f(C)$.*

Пример 1. В треугольной пирамиде $ABCD$ точки G, K, H делят ребра DA, DC, AB в отношении $1:3$, $1:1$, $1:2$ соответственно, считая от вершин D и A. Построить сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точки G, K, H (рис 30).

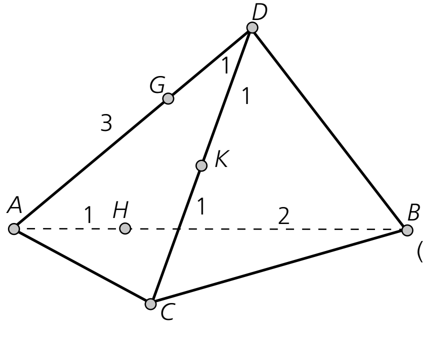

Рис. 30

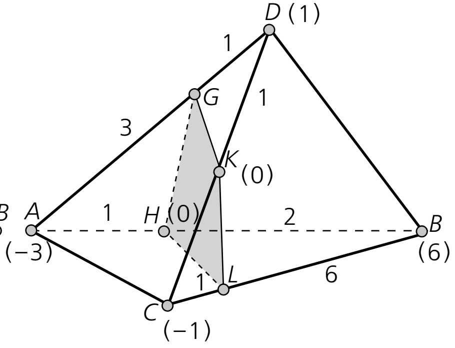

Рис. 31

Решение. Так как плоскость содержит точки $G, K, H,$ то индексы этих точек равны нулю. Примем индекс точки D за 1, тогда индексы точек C и A равны -1 и -3 (рис. 31). Так как $\dfrac{|f(A)|}{|f(B)|}=\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{|f(B)|}$, то индекс точки B равен 6. На ребре CB будет находиться ноль, так как индексы точек C и B имеют разные знаки. Значит, плоскость делит ребро BC как $6:1$.

Пример 2. В треугольной пирамиде $ABCD$ точки H, K, G делят ребра DB, DC, AB в отношении $1:2$, $2:1$, $1:1$ соответственно, считая от вершин D и A. Построить сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точки G, K, H (рис. 32).

Решение. Так как плоскость содержит точки $G, K, H,$ то индексы этих точек равны нулю. Примем индекс точки B за 1, тогда индексы точек A и D равны -1 и $-\dfrac{1}{2}$ соответственно (рис. 33). Так как $\dfrac{|f(D)|}{|f(C)|}=\dfrac{2}{1}=\dfrac{\left|\frac{1}{2}\right|}{|f(C)|}$, то индекс точки C равен $\dfrac{1}{4}$. На ребре CA будет находиться ноль, так как индексы точек C и A имеют разные знаки. Значит, плоскость делит ребро CA как $1:4$.

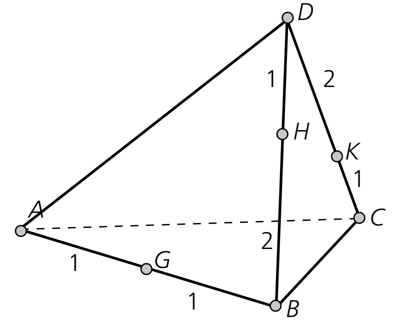

Рис. 32

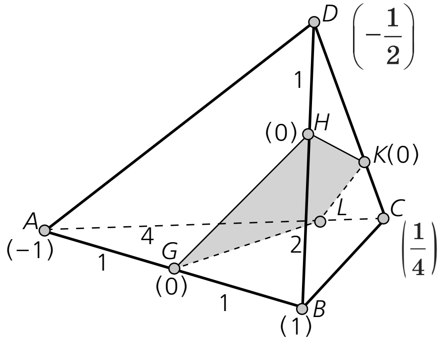

Рис. 33

Пример 3. В треугольной пирамиде $ABCD$ точки G, M делят ребра AB, AD в отношении $1 : 1$. На продолжении ребра DC взяли точку N, таким образом, что $DC : CN = 2 : 1$. Построить сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точки G, M, N (рис. 34).

Решение. Так как плоскость содержит точки M, G, N, то индексы этих точек равны нулю. Примем индекс точки C за 1, тогда индексы точек D, A и B равны 3, -3 и 3 соответственно (рис. 35). На ребре CA будет находится ноль, так как индексы точек C и A имеют разные знаки. Значит, плоскость делит ребро CA как $1 : 3$.

Пример 4. Дан куб $ABCDKLMN$. Точки F, G делят ребра DA и BL в отношении $1 : 1$. Точка E делит ребро DN в отно-

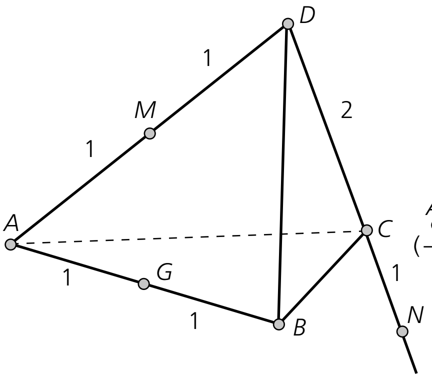

Рис. 34

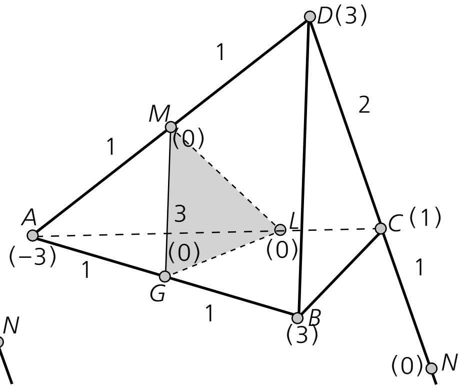

Рис. 35

шении 2 : 1, считая от вершины D. Построить сечение куба плоскостью, проходящей через эти точки (рис. 36).

Решение. Так как плоскость проходит через точки F, E, G, то индексы этих точек равны нулю. Примем индекс точки A за 2, тогда индексы точек D и N равны -2 и 1 соответственно. На всех ребрах, параллельных DN, находятся три равных части; так как индекс точки от D к N увеличивается, то индексы точек B, L, K будут равны $-\frac{3}{2}$, $\frac{3}{2}$, 5 соответственно (рис. 37).

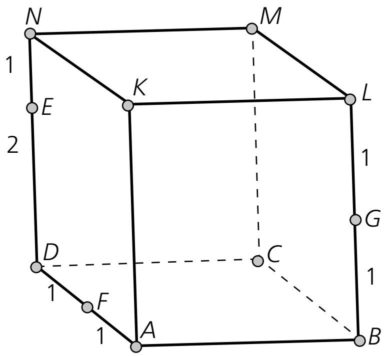

Рис. 36

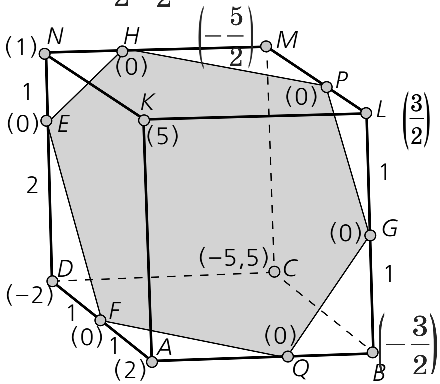

Рис. 37

Разница между индексами точек A и B составляет 3,5 в меньшую сторону, значит, на всех ребрах параллельных AB разница значений индексов в вершинах будет тоже 3,5. Можно теперь проставить индексы точек C и M: они равны $-5{,}5$ и $-\frac{5}{2}$ соответственно. На концах ребер NM, ML индексы имеют разные знаки, значит, эти ребра пересекает плоскость. В нашем случае $MH : HN = 5 : 2$ и $MP : PL = 5 : 3$. Соединяя точки, где индексы равны нулю, строим сечение.

Порой учащиеся ошибочно находят разницу значений индексов на параллельных ребрах, поэтому предлагаем альтернативный вариант решения этой задачи, который позволяет строить и более сложные сечения.

Начало этого варианта решения аналогично предыдущему, но то, что не совсем очевидно, а именно индексы точек B и L обозначим за x и $-x$ (рис. 38). Сумма векторов $\overrightarrow{BD}$ и $\overrightarrow{NL}$ равна нулю. Можно составить уравнение: $-2-x+(-x)-1=0$.

Решая его, находим $x=-\frac{3}{2}$. Аналогично находим индекс

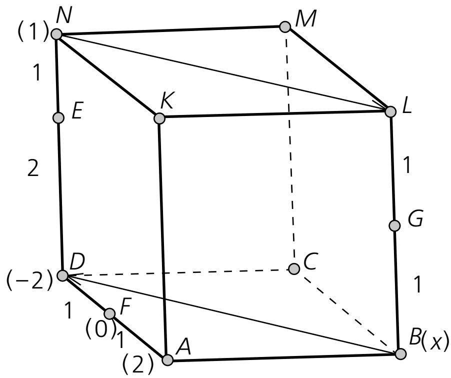

Рис. 38

точки M, приняв его за y и сложив векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{MN}$.

Опираясь на рис. 26, учащимся можно сообщить следующий полезный факт для построения сечений в будущем, демонстрирующий *свойство параллельности плоскостей*. *Если две плоскости пересечены третьей, то линии пересечения параллельны*. На последнем примере этот факт явно просматривается.

Рассмотрим еще один пример, решение которого демонстрирует одновременное применение векторов и вычисление индексов точек.

Пример 5. Дан куб $ABCDKLMN$. Точка E делит ребро DN в отношении $2 : 1$, считая от вершины D. Точки S и T делят ребра AB и LM пополам. Построить сечение, проходящее через эти точки (рис. 39).

Решение. Индексы точек D и N определяются стандартно: они равны -2 и 1, соответственно (рис. 40). Примем ин-

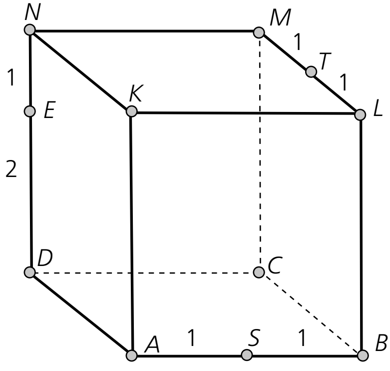

Рис. 39

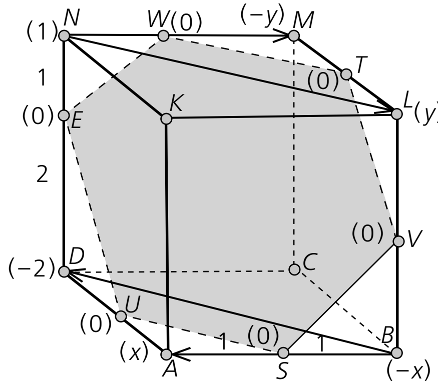

Рис. 40

дексы точек A, B, M, L за x, $-x$, y, $-y$, соответственно. Сумма $\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{NL} = 0$, $\overrightarrow{NM} + \overrightarrow{BA} = 0$. Составим уравнения и решим систему: $\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - y = 1 \end{cases} \Rightarrow x = \dfrac{4}{3}$, $y = \dfrac{5}{3}$. На ребрах DA, LB и MN будут точки с индексом ноль. Окончательно можно расставить отношения отрезков и показать сечение: $LV : VB = 5 : 4$, $AU : UD = 2 : 3$, $MW : WN = 5 : 3$.

Пример 6. Дана правильная треугольная пирамида $ABCD$. В каком отношении секущая плоскость, проходящая через вершину A, середину ребра DC параллельно медиане DK грани ADB, делит ребро BC (рис. 41)?

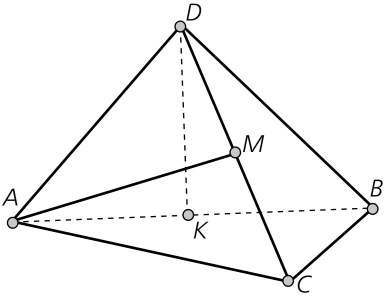

Рис. 41

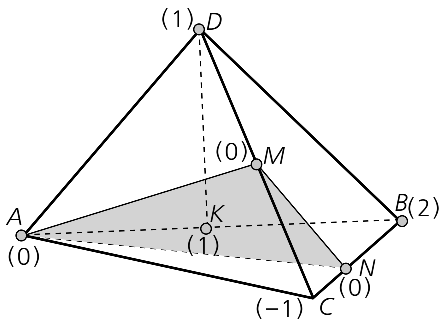

Рис. 42

Решение. Так как секущая плоскость проходит через точки A, M, то индекс этих точек равен нулю (рис. 42). Пусть индекс точки D равен 1, тогда индекс точки C равен -1. Так как отрезок DK параллелен секущей плоскости, то индекс точки K тоже равен 1, а, значит, индекс точки B равен 2. На ребре BC между точками B и C расположена точка, индекс которой равен 0. Значит, плоскость проходит через эту точку и делит ребро в отношении $2 : 1$.

Пример 7. В пирамиде $ABCG$ точки L и E делят ребра GB и CB соответственно в отношении $3 : 1$ и $2 : 1$, считая от вершин G и C. Точки K и H делят ребра GC и AC пополам. В каком отношении плоскость, проходящая через точки L и E параллельно KH, делит остальные ребра пирамиды (рис. 43)?

Решение. Так как секущая плоскость проходит через точки E и L, то их индексы равны нулю (рис. 44). Соответствен-