Л. Э. Генденштейн,
Г. В. Жемчужкина

УЧИМСЯ РЕШАТЬ ЗАДАЧИ ПО ГЕОМЕТРИИ

8 класс

Подробные решения
Подсказки
Ответы

Москва
ИЛЕКСА
2026

УДК 372.851:514
ББК 22.15:74.202я721
Г34

Г34 **Генденштейн Л. Э., Жемчужкина Г. В.**

Учимся решать задачи по геометрии. 8 класс. Подробные решения. Подсказки. Ответы / Л. Э. Генденштейн, Г. В. Жемчужкина. — М. : Илекса, 2026. — 153 с. : ил.

ISBN 978-5-89237-764-5

Пособие содержит задачи по геометрии для 8-го класса, дифференцированные по трём уровням сложности. Оно поможет ученикам научиться решать задачи, а учителям предоставит материал, который можно использовать на уроках, для самостоятельных и домашних работ, а также при подготовке к олимпиадам.

Для учителей математики и учащихся 8-го класса.

УДК 372.851:514
ББК 22.15:74.202я721

ISBN 978-5-89237-764-5

СОДЕРЖАНИЕ

ОБ ЭТОМ УЧЕБНОМ ПОСОБИИ

НАЗНАЧЕНИЕ

Данное пособие:

- поможет школьникам научиться решать задачи;
- предложит учителям много полезного материала для самостоятельных и домашних работ, а также при подготовке учеников к олимпиадам.

СТРУКТУРА

- Задачи дифференцированы по трём уровням сложности.
- К ключевым задачам приведены подробные решения.
- После каждой ключевой задачи даны похожие задачи с подсказками (советами). Ко всем задачам даны ответы.

ОБОЗНАЧЕНИЯ

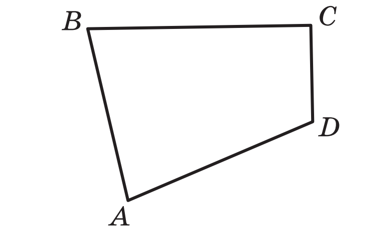
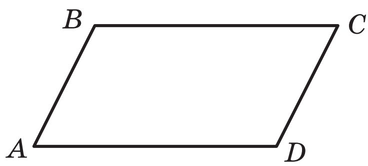
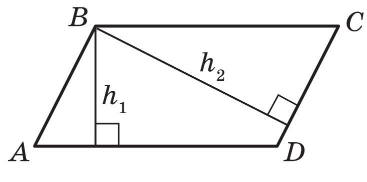
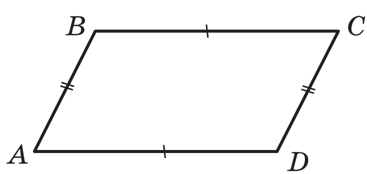
Слева от номера задачи:

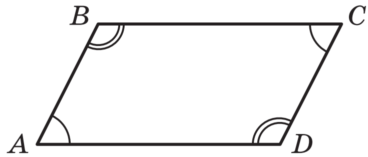
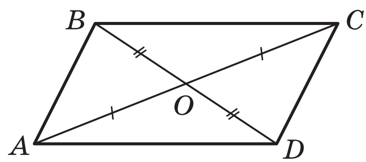
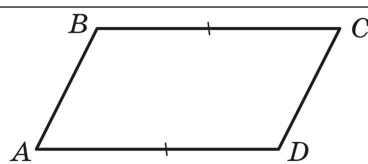
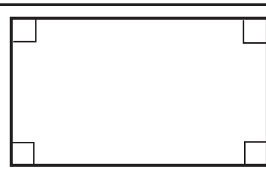
- значком обозначены ключевые задачи, к которым после условия приведены подробные решения;
- значком обозначены задачи, для которых приведены подсказки (советы) внизу страницы.

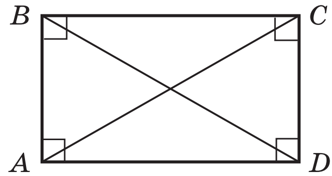
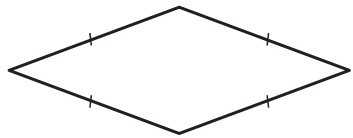
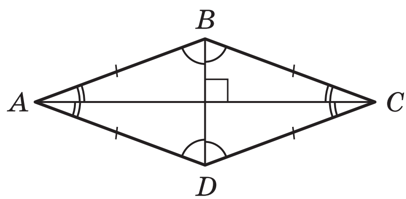
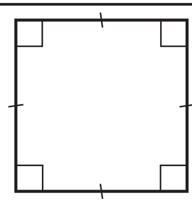
Желаем научиться и научить решать задачи по геометрии!

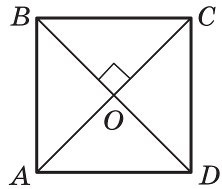
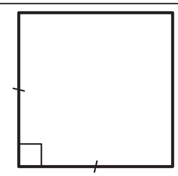
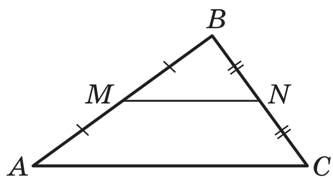
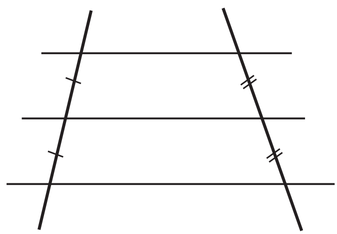
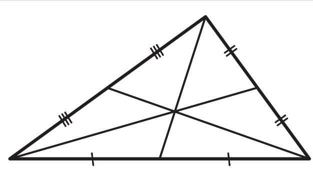
1. ЧЕТЫРЁХУГОЛЬНИКИ

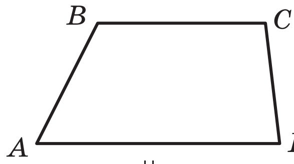
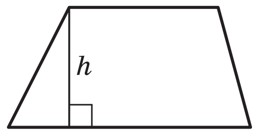
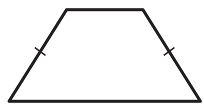
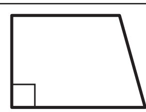
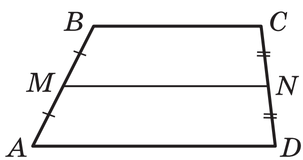
ПОЛЕЗНАЯ ИНФОРМАЦИЯ

Сумма углов выпуклого четырёхугольника равна 360°.	 $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360°$
Параллелограммом называют четырёхугольник, противоположные стороны которого попарно параллельны.	 $AB \parallel DC$; $AD \parallel BC$
Высотой параллелограмма называют перпендикуляр, проведённый из любой точки стороны параллелограмма к прямой, на которой лежит противоположная сторона. Если стороны параллелограмма не равны, у него есть две разные высоты.	
Свойство параллелограмма. Противоположные стороны параллелограмма попарно равны.	
Признак параллелограмма. Если противоположные стороны четырёхугольника попарно равны, то он является параллелограммом.	

Свойство параллелограмма. Противоположные углы параллелограмма попарно равны, а сумма любых соседних углов равна 180°.	 $\angle A + \angle B = 180°$
Признак параллелограмма. Если противоположные углы четырёхугольника попарно равны или сумма любых соседних углов равна 180°, то он является параллелограммом.	
Свойство параллелограмма. Диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам.	
Признак параллелограмма. Если диагонали четырёхугольника точкой пересечения делятся пополам, то он является параллелограммом.	
Признак параллелограмма. Если какие-либо две противоположные стороны четырёхугольника равны и параллельны, то он является параллелограммом.	 $BC \parallel AD$
Прямоугольником называют параллелограмм, у которого все углы прямые.	

Свойство прямоугольника. Диагонали прямоугольника равны.	 $AC = BD$
Признак прямоугольника. Если диагонали параллелограмма равны, то он является прямоугольником.	
Ромбом называют параллелограмм, у которого все стороны равны.	
Свойства ромба. Диагонали ромба перпендикулярны и лежат на биссектрисах его углов.	
Признак ромба. Если диагонали параллелограмма перпендикулярны, то он является ромбом.	
Признак ромба. Если хотя бы одна диагональ параллелограмма лежит на биссектрисе его угла, то он является ромбом.	
Квадратом называют прямоугольник, у которого все стороны равны.	

Свойства квадрата. Диагонали квадрата равны и перпендикулярны.	 $AC = BD$
Признак квадрата. Если диагонали параллелограмма равны и перпендикулярны, то он является квадратом.	
Признак квадрата. Если две стороны параллелограмма равны и перпендикулярны, то он является квадратом.	
Средней линией треугольника называют отрезок, соединяющий середины двух его сторон. Она параллельна третьей стороне и равна её половине.	 $MN \parallel AC;\ MN = \frac{AC}{2}$
Теорема Фалеса. Параллельные прямые, отсекающие равные отрезки на одной прямой, отсекают равные отрезки и на любой другой прямой, которую они пересекают.	
Три медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении 2 : 1, считая от вершин треугольника.	

Трапецией называют четырёхугольник, у которого только две стороны параллельны. Параллельные стороны трапеции называют *основаниями*, а не параллельные — *боковыми сторонами*.	 $BC \parallel AD$
Высота трапеции — перпендикуляр, проведённый из любой точки одного основания трапеции к прямой, на которой лежит другое её основание.	
Равнобедренной (или равнобокой) называют трапецию, боковые стороны которой равны.	
Прямоугольной называют трапецию, у которой есть прямой угол.	
Средней линией трапеции называют отрезок, соединяющий середины её боковых сторон. Средняя линия трапеции параллельна её основаниям и равна их полусумме.	 $MN \parallel AD;\ MN = \dfrac{AD + BC}{2}$

ПРОИЗВОЛЬНЫЙ ЧЕТЫРЁХУГОЛЬНИК

Первый уровень

1.1. Три стороны четырёхугольника равны 3 см, 5 см и 10 см. Может ли его четвёртая сторона равняться 20 см?

Решение. Поскольку никакие три вершины четырёхугольника не лежат на одной прямой, любые три его стороны представляют собой ломаную, концы которой совпадают с концами четвёртой стороны. А поскольку длина ломаной больше длины отрезка, соединяющего её концы, длина любой стороны четырёхугольника меньше суммы длин остальных его сторон. Поэтому если три стороны четырёхугольника равны 3 см, 5 см и 10 см, то его четвёртая сторона меньше 18 см, поэтому она не может равняться 20 см.

Ответ: Нет.

1.2. Периметр четырёхугольника равен 24 см.
а) Может ли какая-либо сторона этого четырёхугольника равняться 12 см?
б) Может ли какая-либо диагональ этого четырёхугольника равняться 12 см?

1.3. Докажите, что сумма углов выпуклого четырёхугольника равна 360°.

1.4. Может ли в выпуклом четырёхугольнике быть:
а) четыре острых угла;
б) четыре тупых угла?

Второй уровень

1.5. При каких a выражения $a + 1$; $a + 2$; $a + 3$; $a + 12$ могут быть длинами сторон четырёхугольника, выраженными в сантиметрах?

1.2. б) Воспользуйтесь неравенством треугольника.
1.3. Проведите любую диагональ четырёхугольника и воспользуйтесь тем, что сумма углов треугольника равна 180°.
1.4. Воспользуйтесь тем, что сумма углов выпуклого четырёхугольника равна 360°.
1.5. Учтите, что даже наибольшая сторона четырёхугольника меньше суммы остальных трёх сторон.

1.6. При каких a выражения a; $a + 4$; $a + 6$; $a + 20$ *не могут* быть длинами сторон четырёхугольника, выраженными в сантиметрах?

1.7. Сколько в выпуклом четырёхугольнике может быть:
а) тупых углов;
б) прямых углов;
в) острых углов?

1.8. Может ли один из углов выпуклого четырёхугольника равняться сумме остальных трёх углов?

1.9. Может ли в выпуклом четырёхугольнике один угол быть больше суммы трёх других углов?

1.10. Может ли наименьший угол четырёхугольника с неравными углами быть прямым?

1.11. Может ли наибольший угол четырёхугольника с неравными углами быть прямым?

Третий уровень

1.12. Чему равны углы A и C на рис. 1.1?

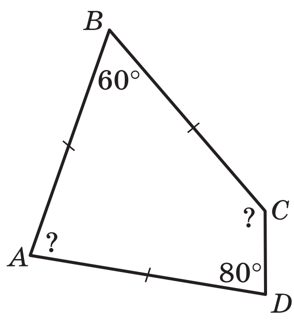


Рис. 1.1

1.7. Воспользуйтесь тем, что сумма углов выпуклого четырёхугольника равна 360°.

1.8. Воспользуйтесь тем, что сумма углов выпуклого четырёхугольника равна 360°, а также тем, что каждый угол выпуклого четырёхугольника меньше развёрнутого.

1.12. Проведите диагональ AC и докажите, что треугольник ABC — равносторонний. Затем воспользуйтесь свойством равнобедренного треугольника для треугольника DAC.

1.13. Чему равен угол C на рис. 1.2?

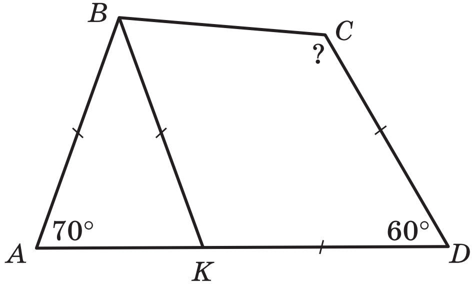


Рис. 1.2

ПАРАЛЛЕЛОГРАММ

УГЛЫ ПАРАЛЛЕЛОГРАММА

Первый уровень

1.14. Докажите, что:

а) сумма соседних углов параллелограмма равна 180°;

б) противоположные углы параллелограмма равны.

Решение. а) Поскольку противоположные стороны параллелограмма параллельны, его соседние углы являются односторонними при секущей, пересекающей параллельные прямые, следовательно, их сумма равна 180°. б) По уже доказанному, для параллелограмма $ABCD$ справедливы равенства $\angle A + \angle B = 180°$, $\angle B + \angle C = 180°$, откуда следует, что $\angle A = \angle C$. Аналогично доказывается, что $\angle B = \angle D$.

1.15. Докажите, что если сумма любых соседних углов четырёхугольника равна 180°, то этот четырёхугольник — параллелограмм.

1.13. Проведите отрезок KC и докажите, что треугольник KCD — равносторонний. Воспользуйтесь далее свойством равнобедренного треугольника для треугольников ABK и BKC, теоремой о сумме углов треугольника, а также свойством смежных углов.

1.15. Докажите, что противоположные стороны данного четырёхугольника параллельны, используя признак параллельности прямых.

1.16. Докажите, что если противоположные углы выпуклого четырёхугольника попарно равны, то этот четырёхугольник — параллелограмм.

1.17. Угол A параллелограмма $ABCD$ равен $40°$. Чему равны остальные углы параллелограмма?

Решение. Поскольку сумма соседних углов параллелограмма равна $180°$, а противоположные углы параллелограмма равны, получаем $\angle B = 180° - 40° = 140°$, $\angle C = 40°$, $\angle D = 140°$.

Ответ: $\angle B = 140°$, $\angle C = 40°$, $\angle D = 140°$.

1.18. Один угол параллелограмма в 5 раз больше другого. Чему равны углы параллелограмма?

1.19. Один угол параллелограмма на $30°$ больше другого. Чему равны углы параллелограмма?

1.20. Сумма двух углов параллелограмма равна $100°$. Чему равны углы параллелограмма?

1.21. Сумма трёх углов параллелограмма равна $240°$. Чему равны углы параллелограмма?

1.22. Разность двух углов параллелограмма равна $40°$. Чему равны углы параллелограмма?

1.23. Чему равны углы параллелограмма, если градусные меры двух его углов относятся как $5 : 13$?

1.16. Докажите сначала, что сумма любых соседних углов данного четырёхугольника равна $180°$, используя то, что сумма углов выпуклого четырёхугольника составляет $360°$. Затем докажите, что противоположные стороны данного четырёхугольника параллельны, используя признак параллельности прямых.

1.18. Воспользуйтесь тем, что сумма соседних углов параллелограмма равна $180°$.

1.20. Докажите сначала, что данные в условии углы являются противоположными.

1.22. Неравными могут быть только соседние углы параллелограмма. Воспользуйтесь тем, что сумма соседних углов параллелограмма равна $180°$.

Второй уровень

1.24. На рис. 1.3 $ABCD$ — параллелограмм, $\angle CAB = 35°$, $\angle BCA = 45°$. Чему равны углы параллелограмма?

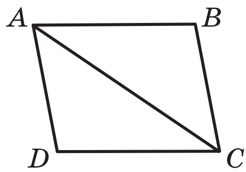


Рис. 1.3

Решение. Используя теорему о сумме углов треугольника для треугольника ABC и заданные градусные меры углов CAB и BCA, получим $\angle B = 100°$. Поскольку сумма соседних углов параллелограмма равна 180°, а противоположные углы параллелограмма равны, получим $\angle A = 80°$, $\angle C = 80°$, $\angle D = 100°$.

Ответ: $\angle A = 80°$, $\angle B = 100°$, $\angle C = 80°$, $\angle D = 100°$.

1.25. Диагональ параллелограмма делит его на два треугольника, в одном из которых есть угол 30°, а в другом — 40°. Какими могут быть углы параллелограмма?

1.26. Диагональ BD параллелограмма $ABCD$ перпендикулярна стороне AB и образует угол 30° со стороной BC. Сторона AB равна 5 см.

а) Чему равны углы параллелограмма?

б) Чему равен периметр параллелограмма?

1.27. Докажите, что угол между высотами, проведёнными из вершины тупого угла параллелограмма, равен его острому углу.

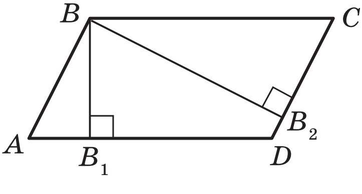


Рис. 1.4

Решение. На рис. 1.4 BB_1 и BB_2 — высоты, проведённые из вершины тупого угла B параллелограмма $ABCD$. Поскольку $BB_2 \perp AB$, получаем $\angle B_1BB_2 + \angle ABB_1 = 90°$. Кроме того, $\angle A + \angle ABB_1 = 90°$, поскольку углы A и ABB_1 — острые углы прямоугольного треугольника ABB_1. Из написанных равенств следует, что $\angle B_1BB_2 = \angle A$.

1.25. Учтите, что рассматриваемые треугольники равны. Рассмотрите все возможные варианты. У задачи есть три решения.

1.26. Воспользуйтесь свойством прямоугольного треугольника с углом 30°.

1.28. Один из углов параллелограмма равен 30°.

а) Чему равен угол между высотами параллелограмма, проведёнными из вершины тупого угла?

б) Чему равен угол между высотами параллелограмма, проведёнными из вершины острого угла?

1.29. Угол между высотами параллелограмма, проведёнными из вершины тупого угла, равен 30°. Найдите углы параллелограмма.

1.30. Диагональ BD параллелограмма $ABCD$ перпендикулярна стороне AB и образует угол 40° со стороной BC.

а) Найдите углы параллелограмма.

б) Найдите угол между высотами параллелограмма, проведёнными из вершины тупого угла.

1.31. В четырёхугольнике $ABCD$ проведена диагональ BD. Дано, что $AB = CD = BD$ и $\angle ABD = \angle BDC = 60°$. Найдите углы четырёхугольника.

1.32. На рис. 1.5 $ABCD$ — параллелограмм. Найдите угол A.

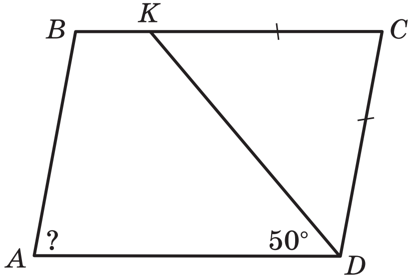


Рис. 1.5

Решение. Противоположные стороны параллелограмма параллельны, поэтому углы $\angle CKD$ и $\angle ADK$ равны как накрест лежащие при секущей KD, пересекающей параллельные прямые AD и BC. Отсюда $\angle CKD = \angle ADK = 50°$. Поскольку треугольник KCD равнобедренный с основанием KD, получаем $\angle CKD = \angle CDK = 50°$. По теореме о сумме

1.31. Докажите сначала, что четырёхугольник $ABCD$ — параллелограмм.

углов треугольника отсюда следует, что $\angle C = 80°$. Поскольку противоположные углы параллелограмма равны, получаем $\angle A = 80°$.

Ответ: 80°.

1.33. На рис. 1.6 $ABCD$ — параллелограмм. Найдите угол BDH.

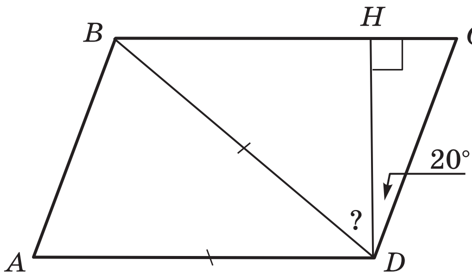


Рис. 1.6

1.34. Градусные меры двух углов параллелограмма относятся как 7 : 8. Чему равны углы параллелограмма?

Третий уровень

1.35. Найдите угол D параллелограмма $ABCD$ на рис. 1.7.

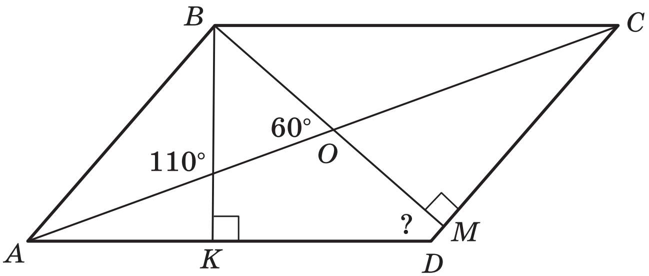


Рис. 1.7

1.33. Найдите сначала угол HCD, затем докажите, что треугольник BCD — равнобедренный.