Важнейшие темы школьной математики

В.А. Тарасов

Показательные и логарифмические функции и выражения с постоянными и переменными основаниями

Теория и подробный разбор задач

10–11 классы

Москва
ИЛЕКСА
2026

УДК 372.851:542
ББК 22.141:74.202я721
Т19

Тарасов В.А.

Т19 Показательные и логарифмические функции и выражения с постоянными и переменными основаниями. Теория и подробный разбор задач. 10–11 классы. — М.: Илекса, 2026. — 297 с. (Важнейшие темы школьной математики).

ISBN 978-5-89237-697-6

Подробно, по принципу «от простого к сложному», изложена важная, актуальная тема, связанная с показательными и логарифмическими функциями и выражениями с постоянными и переменными основаниями, описываются теория, разбор задач с модулями, радикалами, тригонометрическими выражениями, а также современные методы замены множителей и перебора ОДЗ для решения сложных неравенств.

Цель книги — помочь читателю гарантированно освоить тему, выработать или закрепить устойчивые навыки и умения для решения задач по ней; подготовиться к ЕГЭ по математике, к поступлению и обучению в вузе.

Специфика книги состоит в рассмотрении показательных и логарифмических функций как с постоянными, так и с переменными основаниями; в выявлении дополнительных логарифмических формул — «ключей» к решению ряда экзаменационных задач; в описании типовых ошибок при работе с логарифмами и рекомендаций по их устранению.

Адресована широкому кругу читателей: школьникам, абитуриентам, учителям и всем любителям математики.

УДК 372.851:542
ББК 22.141:74.202я721

ISBN 978-5-89237-697-6

© Тарасов В.А., 2026
© ИЛЕКСА, 2026

Предисловие

Тема «Показательные и логарифмические функции и выражения с постоянными и переменными основаниями» занимает важное место в учебном процессе, на олимпиадах, экзаменах, в том числе в ЕГЭ по математике; определяет общую математическую культуру школьника, абитуриента, студента; присутствует во многих изданиях, например, в [1–26]. Упомянем также работы [19–23]. В них описан метод регуляризации, или метод замены множителей, или обобщённый метод интервалов. Метод эффективен, но пока недостаточно известен широкому читателю. Целесообразны:

1) дополнительная популяризация метода замены множителей;

2) распространение его на неравенства с «арками» — арксинусами, арккосинусами, арктангенсами, арккотангенсами;

3) дальнейшее развитие метода интервалов с помощью рассмотрения задачи на отдельных участках ОДЗ, если рассмотрение её сразу на всей ОДЗ затруднительно (метод перебора ОДЗ).

Сказанное подтверждает актуальность подробного, комплексного изложения данной темы по принципу «от простого к сложному» (от свойств функций к упомянутым обобщениям метода интервалов) с анализом типовых ошибок, который был бы доступным, интересным и рядовому школьнику, незнакомому или малознакомому с темой, и подготовленному читателю.

Именно такое изложение принято в данной книге. Изложение в ней базируется прежде всего на подробном изучении:

- свойств показательных и логарифмических функций (главы 1, 4);
- понятия «логарифм» (глава 2);
- основных и дополнительных (малоизвестных, но часто встречающихся на экзаменах, на олимпиадах) логарифмических формул (глава 2);

- простейших показательных и логарифмических уравнениях, неравенствах как с постоянными, так и с переменными основаниями степеней, логарифмов (главы 1, 3, 4).

Особое внимание к последним объясняется просто: к ним сводятся многие сложные уравнения, неравенства. Методы такого сведения изложены в главе 5.

В книге собраны и изучены дополнительные формулы на логарифмы, которые эффективны при работе с логарифмическими выражениями (глава 2), при решении задач повышенной сложности на олимпиадах, экзаменах, в том числе на ЕГЭ (глава 5).

В главах 2–4 выявляются и подробно анализируются типовые ошибки при использовании логарифмических формул, даются рекомендации по их недопущению.

В главе 6 рассмотрены показательно-степенные уравнения и методы их решения; показана важность выявления и использования специфики конкретных числовых данных каждого конкретного уравнения.

На базе 1–6 глав читатель теоретически и практически подготовлен к использованию метода замены множителей. В главе 7 дано его подробное описание, применение, распространение на неравенства с обратными тригонометрическими функциями («арками»).

В главе 8 описан метод перебора ОДЗ. Его можно рассматривать как дальнейшее обобщение метода интервалов для сложных неравенств, к которым трудно или невозможно напрямую применить метод замены множителей. Метод перебора ОДЗ здесь распространен и на неравенства с «арками».

В главе 9 собраны задачи разной сложности (с ответами) для самостоятельного решения; даны примеры решения задач с параметром.

Итак, с помощью глав 1–9 читатель сможет выработать и закрепить устойчивые навыки и умения для решения задач разной степени сложности; освоить современные методы решения сложных неравенств; подготовиться к олимпиадам, экзаменам, в том числе к ЕГЭ по математике, к обучению в вузе.

Материалы для книги отобраны из ряда популярных изданий, а также из следующих двух важных проектов, в которых автору посчастливилось быть активным участником.

Первый проект можно условно назвать «Конкурсная математика», или перевод конкурсной и олимпиадной математики МГУ им. М.В. Ломоносова на язык обычного школьника». Он продолжался более 10 лет (с 1996 г.) и заключался в ежегодной публикации тематических статей-обзоров с подробным разбором всех конкурсных задач МГУ за

прошедший год (учебно-методический журнал «Математика» Издательского дома «1 сентября»).

Второй проект можно условно назвать «Школьная математика». Он заключался в создании видеоуроков по всей школьной программе 7–11 классов (сайт www.interneturok.ru). При разработке их сценариев нами учитывался опыт работы над первым проектом, т.е. требования конкурсной математики, ЕГЭ. Хочется верить, что это — одна из причин определённой популярности интернет-уроков.

Данная книга обобщает полученный в обоих проектах опыт по изучаемой теме. Она предназначена для широкого круга читателей, школьников, абитуриентов, студентов, учителей, всех любителей математики.

Наградой автору за видеоуроки стали отзывы, например, следующего содержания: «Логарифмы? Да это, оказывается, совсем просто! Поспешу обрадовать внуков». Автор надеется на подобные отзывы от читателей данной книги, но с благодарностью примет и все замечания.

Считаю приятным долгом выразить благодарность всем участникам проектов (у них автор многому научился), в том числе В. Алексееву, В. Галкину, В. Панфёрову, И. Сергееву (МГУ им. М.В. Ломоносова) и В. Голубеву (Москва) за многолетнее творческое сотрудничество по первому проекту «Конкурсная математика»; М. Лазареву, Ю. Крыловой (Москва), Р. Романову (Санкт-Петербург) за сотрудничество по второму проекту — «Школьная математика».

Глава 1. Показательная функция, простейшие показательные и показательно-степенные уравнения и неравенства

Методы решения задач на показательную функцию (уравнений, неравенств, систем и др.) вытекают из свойств показательной функции. Их следует повторить, изучить, прокомментировать.

1.1. Показательная функция

1.1.1. Определение

Показательной называется функция вида

$$y = f(x), \text{ где } f(x) = a^x,\ 0 < a \neq 1. \qquad (1)$$

Здесь x — аргумент, независимая переменная, y — зависимая переменная, f — функция, или закон, сопоставляющий каждому значению x единственное значение y, основание степени a — фиксированное положительное число, отличное от 1; оно задаёт конкретную показательную функцию.

Примеры:

$y = 2^x$; $\quad y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$; $\quad y = \pi^x$

($a = 2$) $\quad \left(a = \frac{1}{2}\right)$ $\quad$ ($a = \pi = 3{,}14\ldots$)

Примечание. Функция $y = 1^x$ равна 1 при любом x и не относится к числу показательных функций, но случай $a = 1$ приходится рассматривать в задачах.

1.1.2. График показательной функции

Кривую $y = a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$) называют *экспонентой*. Различают два случая:

1) $a > 1$; $\quad$ 2) $0 < a < 1$.

Случай $a > 1$ иллюстрирует кривая $y = 2^x$ ($a = 2$), она получена с помощью табл. 1 и показана на рис. 1.

Таблица 1

x	0	1	2	–1	–2
$y = 2^x$	1	2	4	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Таблица 2

x	0	1	2	–1	–2
$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	2	4

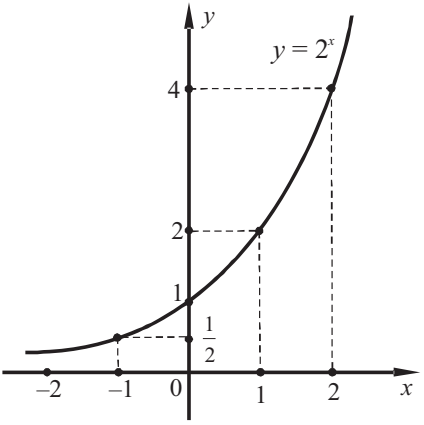

Рис. 1

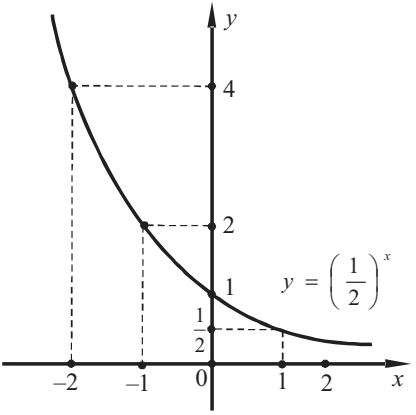

Рис. 2

Случай $0 < a < 1$ иллюстрирует кривая

$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x, \qquad a = \left(\frac{1}{2}\right).$$

Она получена с помощью табл. 2 и показана на рис. 2. На рис. 3 показан характер кривых $y = a^x$

1) при $a > 1$ и 2) при $0 < a < 1$.

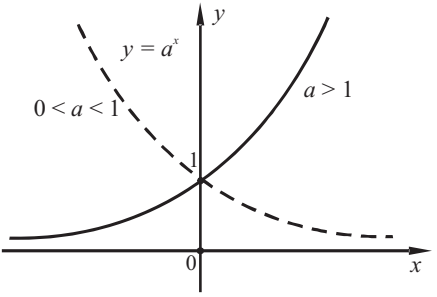

Рис. 3

1.1.3. Основные свойства степеней

Они используются при вычислении показательных функций, в задачах со степенями. Напомним их. При $a > 0$, $b > 0$, $x \in R$, $y \in R$ (иные случаи специально оговариваются) имеем:

$a^0 = 1$ $(a \neq 0)$; 0^0 — не существует; $a^1 = a$ $(a \in R)$;

$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$; $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ $(a \neq 0)$; $(a^x)^y = a^{xy} = (a^y)^x$;

$a^{-1} = \dfrac{1}{a}$ $(a \neq 0)$; $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$ $(a \neq 0)$;

$(ab)^x = a^x \cdot b^x$; $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$ $(b \neq 0)$.

Далее:

$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$; $n = 2, 3, \ldots$; $m = \pm 1, \pm 2, \ldots$

Здесь $a \geq 0$ при $\dfrac{m}{n} > 0$; $a > 0$ при $\dfrac{m}{n} < 0$.

1.2. Свойства показательной функции

$$y = a^x, \qquad a > 0, \qquad a \neq 1.$$

1.2.1. Область определения

Показательная функция определена (имеет смысл, может быть вычислена) при любом действительном значении аргумента, т.е. при $x \in R$. Обозначение: $D(a^x) = R$.

Область определения — множество $D(a^x)$ есть проекция экспоненты на ось x.

1.2.2. Область (множество) значений

Показательная функция принимает все положительные значения; она не может быть равной нулю или отрицательному числу, т.е. $y = a^x \in (0; +\infty)$.

Обозначение: $E(a^x) = (0; +\infty)$.

Область значений получим, спроектировав график функции на ось y. Получим открытый луч $y \in (0; +\infty)$.

Показательная функция отображает всю действительную ось ($x \in R$) на луч $y \in (0; +\infty)$.

1.2.3. Примеры (уравнения, неравенства) на области определения и множество значений

1) $2^x = -1$; *Ответ:* $x \in \varnothing$ (нет решений).

2) $2^x > 0$; *Ответ:* $x \in R$.

3) $\left(\frac{1}{2}\right)^x \le 0$; *Ответ:* $x \in \varnothing$.

4) Найти все значения параметра m, при каждом из которых уравнение $(\pi)^x = m$ имеет хотя бы одно решение.

Ответ: $m \in (0; +\infty)$.

Примечание. Ответ совпадает с множеством значений функции $y = (\pi)^x$, т.е. с лучом $(0; +\infty)$.

1.2.4. Неподвижная точка (0; 1)

Каждая из экспонент $y = a^x$ при любом $a > 0$, $a \ne 1$ проходит через точку $A(0; 1)$, рис. 3.

Действительно, $y(0) = a^0 = 1$.

1.2.5. Монотонное возрастание при $a > 1$

Если $a > 1$, то функция $y = a^x$ монотонно возрастает на всей области определения, т.е. большему значению аргумента соответствует большее значение функции (рис. 4). Более строго:

$$\text{если } x_2 > x_1 \quad (\Delta x = x_2 - x_1 > 0),$$
$$\text{то } a^{x_2} > a^{x_1} \quad (\Delta y = a^{x_2} - a^{x_1} > 0)$$

для любых x_1, x_2 из области определения.

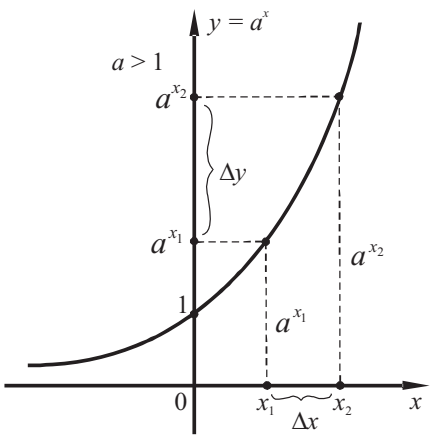

Рис. 4

Для монотонно возрастающих функций приращение аргумента Δx и соответствующее приращение функции Δy имеют один и тот же знак.

При возрастании аргумента от $-\infty$ до $+\infty$ функция $y = a^x$ (при $a > 1$) возрастает от 0 (не включая) до $+\infty$.

Примечание. Под монотонностью функции здесь и далее подразумевается её строгая монотонность. Это ясно из приведённого выше определения монотонного возрастания функции.

1.2.6. Монотонное убывание при $0 < a < 1$

Если $0 < a < 1$, то функция $y = a^x$ монотонно убывает на всей области определения, т.е. большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции (рис. 5). Более строго:

$$\text{если } x_2 > x_1 \quad (\Delta x = x_2 - x_1 > 0),$$
$$\text{то } a^{x_2} < a^{x_1} \quad (\Delta y = a^{x_2} - a^{x_1} < 0)$$

для любых x_1, x_2 из области определения.

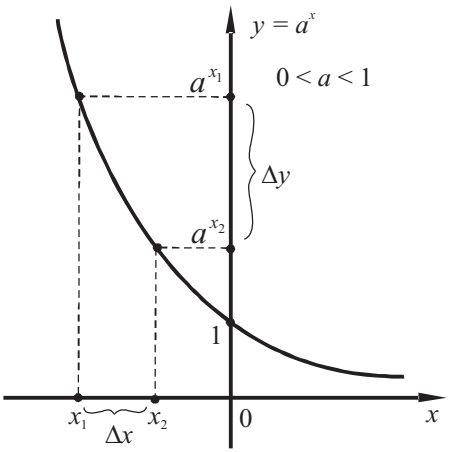

Рис. 5

Для монотонно убывающих функций приращение аргумента Δx и соответствующее приращение функции Δy имеют разные знаки.

При возрастании аргумента от $-\infty$ до $+\infty$ функция $y = a^x$ (при $0 < a < 1$) убывает от $+\infty$ до 0 (не включая).

1.3. Простейшие показательные уравнения и неравенства

Ранее мы выяснили, что показательная функция *монотонна*. Именно это её свойство лежит в основе решения многих показательных уравнений и неравенств. Они, как правило, сводятся к простейшим уравнениям и неравенствам вида:

$$a^{f(x)} = a^{g(x)}; \qquad a^{f(x)} > a^{g(x)}; \qquad a^{f(x)} \geq a^{g(x)};$$
$$(a(x))^{f(x)} > (a(x))^{g(x)}; \ (a(x))^{f(x)} \geq (a(x))^{g(x)}; \ (a(x))^{f(x)} = (a(x))^{g(x)}. \quad (2)$$

Ясно, что последние должны быть тщательно изучены.

1.3.1. Показательные уравнения с постоянным основанием

Они имеют вид

$$\boxed{a^{f(x)} = a^{g(x)}.} \quad (3)$$

Если основание a — фиксированное положительное число, отличное от 1, то уравнение (3) решается по схеме:

$$\boxed{a^{f(x)} = a^{g(x)} \underset{a \neq 1}{\overset{a>0}{\Leftrightarrow}} f(x) = g(x).} \quad (4)$$

Она вытекает из монотонности показательной функции $y = a^t$, из свойства степеней.

Степени с одинаковым основанием a ($a > 0$, $a \neq 1$) равны тогда и только тогда, когда равны их показатели.

Если основание $a = 1$, то получаем уравнение:

$$\boxed{1^{f(x)} = 1^{g(x)}.} \quad (5)$$

Его решение — множество всех значений x, при каждом из которых определены обе функции $f(x)$ и $g(x)$. Это множество есть пересечение областей определения функций $f(x)$ и $g(x)$:

$$\boxed{1^{f(x)} = 1^{g(x)} \Leftrightarrow x \in D(f) \cap D(g).} \quad (6)$$

Примечание. Отметим все же, что иногда при решении уравнения (3) допускают случай, когда $a(x) = 0$. См., например, [14].

1.3.2. Примеры

Решить уравнения:

1) $4^x = 8^{3x-1}$.

Решение: Так как $4 = 2^2$, $8 = 2^3$, то имеем:

$$2^{2x} = 2^{3(3x-1)} \Leftrightarrow 2x = 3(3x - 1) \Leftrightarrow 7x = 3 \Leftrightarrow x = \frac{3}{7}.$$

Ответ: $x = \frac{3}{7}$.

Примечания. Проверка необязательна, так как использованы только равносильные (эквивалентные) преобразования, т.е. такие преобразования, которые не искажают множество решений.

2) $(\sqrt[3]{2})^{2x} = 16$.

Решение: Так как $\sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}}$, $16 = 2^4$, то имеем:

$$2^{\frac{2x}{3}} = 2^4 \Leftrightarrow \frac{2x}{3} = 4 \Leftrightarrow x = 6.$$

Ответ: $x = 6$.

3) $1^{\sqrt{x}} = \dfrac{m^2 - 2m + 1}{(m-1)^2}$.

Решение: Так как $\dfrac{m^2 - 2m + 1}{(m-1)^2} = \dfrac{(m-1)^2}{(m-1)^2} = 1$, то при $m \neq 1$ имеем:

$$\begin{cases} 1^{\sqrt{x}} = 1, \\ m \neq 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0, \\ m \neq 1. \end{cases}$$

Ответ: а) При $m \neq 1$ решением является множество всех неотрицательных чисел $x \in [0; \infty)$.

б) При $m = 1$ решений нет.

Примечания. Чтобы решить задачу с параметром, как правило, надо:

- «перебрать» все значения параметра и
- при каждом из них указать решение задачи.

Именно это и сделано выше в третьем примере.

Здесь важно понимать, что правая часть уравнения равна 1 при любом $m \neq 1$ и не существует при $m = 1$.

4) $1^{\frac{1}{x}} = 1^{\frac{x}{x-1}}$.

Решение. Показатели не существуют при $x = 0$, $x = 1$. При остальных значениях x уравнение удовлетворяется ($1 \equiv 1$).

Ответ: $x \in (-\infty; 0) \cup (0; 1) \cup (1; +\infty)$.

5) $\sqrt[4]{9^{x+5}} = \dfrac{27}{\sqrt[5]{3}}$.

Решение. Обе части уравнения представим в виде степеней с основанием 3.

$$\sqrt[4]{9^{x+5}} = 9^{\frac{x+5}{4}} = (3^2)^{\frac{x+5}{4}} = 3^{\frac{x+5}{2}}.$$

$$\frac{27}{\sqrt[5]{3}} = \frac{3^3}{3^{\frac{1}{5}}} = 3^{3-\frac{1}{5}} = 3^{\frac{14}{5}}.$$

Далее имеем:

$$3^{\frac{x+5}{2}} = 3^{\frac{14}{5}} \Leftrightarrow \frac{x+5}{2} = \frac{14}{5} \Leftrightarrow 5(x+5) = 14 \cdot 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x + 5 = \frac{28}{5} \Leftrightarrow x = \frac{28}{5} - 5 = \frac{3}{5}.$$

Ответ: $x = 0{,}6$.

6) $\left(\frac{2}{3}\right)^{x-x^2} = \frac{9}{4}$.

Решение. Обе части приведём к основанию $\frac{3}{2}$. Имеем:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{x-x^2} = \left(\left(\frac{3}{2}\right)^{-1}\right)^{x-x^2} = \left(\frac{3}{2}\right)^{x^2-x}; \qquad \frac{9}{4} = \left(\frac{3}{2}\right)^2.$$

Значит,

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{x^2-x} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \Leftrightarrow x^2 - x = 2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1, \\ x = 2. \end{array}\right.$$

Ответ: $x = -1$; $x = 2$.

В следующих уравнениях неизвестное содержится и в основании, и в показателе.

1.3.3. Простейшие показательные уравнения с переменным основанием

Это уравнения вида:

$$\boxed{(a(x))^{f(x)} = (a(x))^{g(x)}.} \qquad (7)$$

Их называют также *показательно-степенными уравнениями*. Здесь неизвестное «x» содержится и в показателях $f(x)$, $g(x)$ и в основании $a(x)$.

Показательно-степенные выражения $(a(x))^{f(x)}$, $(a(x))^{g(x)}$ определены:

- при положительном основании ($a(x) > 0$) и
- при любых действительных показателях $f(x)$, $g(x)$ (положительных и отрицательных, рациональных и иррациональных).

Как и ранее, при решении уравнения (7) *отдельно выделим случай*, когда основание $a(x) = 1$. При этом показатели $f(x)$, $g(x)$ должны существовать. Получим следующую схему решения уравнения (7):

$$a^f = a^g \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0; \\ f = g; \end{cases} \text{ или } \begin{cases} a = 1; \\ f, g - \text{существуют}. \end{cases} \qquad (8)$$

Здесь для краткости букву «x» опустили.

Сформулируем *методику* решения показательно-степенных уравнений. Надо:

1) Уравнять основания и свести уравнение к виду (7).

2) Приравнять показатели и решить уравнение

$$f(x) = g(x). \qquad (9)$$

3) Отобрать те корни этого уравнения, при которых $a(x) > 0$, например, подстановкой их в это неравенство.

Важное замечание. Неравенство $a(x) > 0$ *можно не решать*. Достаточно подставить в него корни уравнения (9). Иначе будет потеряно экзаменационное время, если неравенство $a(x) > 0$ трудоёмко.

4) Приравнять основание к единице, решить уравнение

$$a(x) = 1 \qquad (10)$$

и отобрать те корни этого уравнения, при которых существуют $f(x)$ и $g(x)$, например, подстановкой их в $f(x)$ и $g(x)$.

Аналогичное замечание: искать области определения функций $f(x)$, $g(x)$, их пересечение вовсе не обязательно. Достаточно в $f(x)$ и $g(x)$ подставить корни уравнения (10).

5) Выписать ответ.

1.3.4. Примеры

1. *Решить уравнение*: $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x^x}$.

Решение. Выпишем ОДЗ: $x > 0$. Учтём, что в ОДЗ $\sqrt{x^x} = x^{\frac{x}{2}}$ и получим уравнение вида (7):

$$x^{\sqrt{x}} = x^{\frac{x}{2}}.$$

Решаем его по схеме (8):

$$x^{\sqrt{x}} = x^{\frac{x}{2}} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ \sqrt{x} = \dfrac{x}{2}, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x = 1, \\ 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ 1 = \dfrac{\sqrt{x}}{2}, \end{cases} \text{ или } x = 1 \Leftrightarrow x = 4 \text{ или } x = 1.$$

Ответ: $x = 4$, $x = 1$

2. *Решить уравнение*: $x^{x^2 - \frac{1}{4}} = 1$

Решение. Выпишем ОДЗ: $x > 0$. В ОДЗ $1 = x^0$. Получаем уравнение типа (7):

$x^{x^2 - \frac{1}{4}} = x^0$ (уравняли основания).

Решаем его по схеме (8):

$$x^{x^2-\frac{1}{4}} = x^0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x^2 - \dfrac{1}{4} = 0, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x = 1, \\ 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{2}, \\ x = -\dfrac{1}{2}, \end{array}\right. \end{cases} \text{ или } x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \text{ или } x = 1.$$

Ответ: $x = \dfrac{1}{2}$, $x = 1$.

Примечания. а) Исходное уравнение удовлетворяется при $x = -\dfrac{1}{2}$. Действительно,

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}} = 1 \Leftrightarrow \left(-\frac{1}{2}\right)^0 = 1 \Leftrightarrow 1 = 1.$$

Однако изначально для левой части уравнения допускаются только $x > 0$. Поэтому $x = -\dfrac{1}{2} \notin$ ОДЗ и мы вправе его отвергнуть.

б) Часто забывается случай $x = 1$. Это явная ошибка!

Теперь — более сложное показательно-степенное уравнение [14].

3. *Решить уравнение*: $|\cos x|^{\sin^2 x - \frac{3}{2}\sin x + \frac{1}{2}} = 1$.

Решение. В области определения $|\cos x| > 0 \Leftrightarrow \cos x \neq 0$ и поэтому $1 = |\cos x|^0$. Это позволяет уравнять основания и получить уравнение вида (7):

$$|\cos x|^{\sin^2 x - \frac{3}{2}\sin x + \frac{1}{2}} = |\cos x|^0.$$

Согласно схеме (8) рассмотрим два случая и получим:

$$\text{а)} \begin{cases} |\cos x| > 0, \\ \sin^2 x - \dfrac{3}{2}\sin x + \dfrac{1}{2} = 0, \end{cases} \text{ или б)} \begin{cases} |\cos x| = 1, \\ 1 = 1; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\text{а)} \begin{cases} \cos x \neq 0, \\ \left[\begin{array}{l} \sin x = \dfrac{1}{2}, \\ \sin x = 1, \end{array}\right. \end{cases} \text{ или б) } \cos x = \pm 1 \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \text{ или } \cos x = \pm 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n \text{ или } x = \pi k \ (n, k \in Z).$$

Ответ получен.

Пояснения для случаев а) и б).

Уравнение в случае а) решено заменой:

$$\sin x = t \in [-1;1],$$

при которой

$$t^2 - \frac{3}{2}t + \frac{1}{2} = 0; \quad 2t^2 - 3t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2} \text{ или } t = 1.$$

Значит, $\sin x = \frac{1}{2}$ или $\sin x = 1$.

Далее: $\sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z$ (рис. 6).

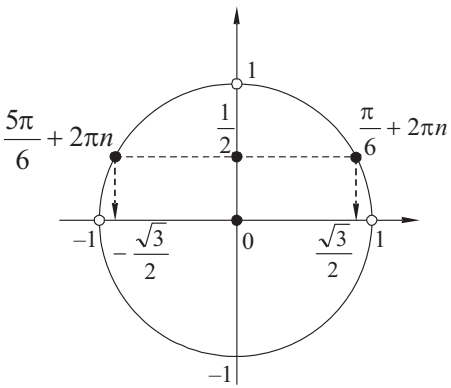

Рис. 6

Значение $\sin x = 1$ не подходит, так как тогда $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 0$ и $\cos x = 0$, что недопустимо для случая а).

В случае б) имеем $\cos x = \pm 1 \Leftrightarrow x = \pi k,\ k \in Z$, рис. 7.

Ответ: $x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n;\ x = \pi k;\ n, k \in Z.$

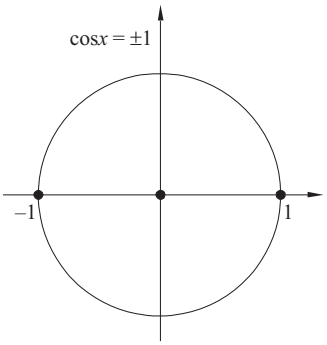

Рис. 7

Мы рассмотрели методику и примеры решения *простейших показательных уравнений* с постоянным и переменным основанием.

Эти решения основаны на свойстве монотонности показательной функции, на свойстве степеней с одинаковым основанием. На этих же свойствах основано решение показательных неравенств.

1.3.5. Простейшие показательные неравенства с постоянным основанием

Простейшими показательными неравенствами с постоянным основанием называют показательные неравенства вида:

$$a^{f(x)} > a^{g(x)}; \quad a^{f(x)} \geq a^{g(x)}, \text{ где } a > 0,\ a \neq 1. \tag{11}$$

Для краткости применяют иную запись:

$$a^{f(x)} \vee a^{g(x)}. \tag{12}$$

Здесь символ $\vee$ означает $>, \geq, <$ или $\leq$.

Если основание a — фиксированное число и $a > 1$, то функция $y = a^t$ монотонно возрастает и поэтому неравенства (11) решаются по схемам:

$$a^{f(x)} > a^{g(x)} \overset{a>1}{\Leftrightarrow} f(x) > g(x), \tag{13}$$

$$a^{f(x)} \geq a^{g(x)} \overset{a>1}{\Leftrightarrow} f(x) \geq g(x), \tag{14}$$

или в обозначениях $g(x) = t_1$, $f(x) = t_2$:

$$a^{t_2} > a^{t_1} \overset{a>1}{\Leftrightarrow} t_2 > t_1, \tag{15}$$

$$a^{t_2} \geq a^{t_1} \overset{a>1}{\Leftrightarrow} t_2 \geq t_1. \tag{16}$$

Соотношения (15)–(16) — это определение монотонно возрастающей функции $y = a^t$ при $a > 1$: большему значению функции соответствует большее значение аргумента и наоборот.

Если a — фиксированное число и $a \in (0; 1)$, то неравенства (11) решаются по схемам:

$$a^{f(x)} > a^{g(x)} \overset{a\in(0;1)}{\Leftrightarrow} f(x) < g(x), \tag{17}$$

$$a^{f(x)} \geq a^{g(x)} \overset{a\in(0;1)}{\Leftrightarrow} f(x) \leq g(x), \tag{18}$$

или в обозначениях $g(x) = t_1$, $f(x) = t_2$:

$$a^{t_2} > a^{t_1} \overset{a\in(0;1)}{\Leftrightarrow} t_2 < t_1, \tag{19}$$

$$a^{t_2} \geq a^{t_1} \overset{a\in(0;1)}{\Leftrightarrow} t_2 \leq t_1. \tag{20}$$

Соотношения (19)–(20) — это определение монотонно убывающей функции $y = a^t$ при $a \in (0; 1)$: *большему значению функции* соответствует *меньшее значение аргумента* и наоборот.

Чтобы не перепутать смысл (знак) неравенств, полезно помнить следующее механическое правило:

а) При $a > 1$ знак исходного неравенства *сохраняется* при переходе к сравнению показателей (аргументов).

б) При $0 < a < 1$ знак исходного неравенства *изменяется* при переходе к сравнению показателей (аргументов).

1.3.6. Примеры

Решить неравенство:

1) $4^x > 8^{3x-1}$.

Решение. Имеем:

$$2^{2x} > 2^{3(3x-1)} \overset{a=2>1}{\Leftrightarrow} 2x > 3(3x-1) \Leftrightarrow 7x < 3 \Leftrightarrow x < \frac{3}{7}.$$

Ответ: $x \in \left(-\infty; \frac{3}{7}\right)$.

Комментарий. Неравенство, как правило, имеет бесчисленное множество частных решений.

В этом заключается отличие от уравнения, имеющего, как правило, несколько решений.

Проверить бесчисленное множество решений неравенства перебором и подстановкой всех решений в исходное уравнение невозможно.

Поэтому неравенство решаем равносильными (эквивалентными) преобразованиями (символ «⇔»). Они сохраняют искомое множество решений вплоть до ответа. Ответ при этом обоснован.

2) *Решить неравенство*:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{2x} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{3(3x-1)}. \qquad (*)$$

Решение. Основание $a = \frac{1}{2} \in (0; 1)$. Поэтому при сравнении показателей (аргументов) знак неравенства изменяем:

$$(*) \overset{a\in(0;1)}{\Leftrightarrow} 2x \leq 3(3x-1) \Leftrightarrow 7x \geq 3 \Leftrightarrow x \geq \frac{3}{7}.$$

Ответ: $x \in \left[\frac{3}{7}; +\infty\right)$.

3) *Решить неравенство*: $2^{\frac{x+1}{x}} \geq 8$.

Решение. Уравняем основания ($8 = 2^3$) и сравним показатели по схеме (14):

$$2^{\frac{x+1}{x}} \geq 2^3 \Leftrightarrow \frac{x+1}{x} \geq 3 \Leftrightarrow \frac{1-2x}{x} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x-\frac{1}{2}}{x} \leq 0.$$

Последнее неравенство решаем методом интервалов (рис. 8).

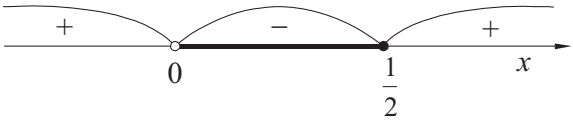

Рис. 8

Функция $y = \dfrac{x - \frac{1}{2}}{x}$.

- не существует при $x = 0$;
- имеет единственный корень $x = \dfrac{1}{2}$;
- сохраняет знак на интервалах $(-\infty; 0)$, $(0; 2)$, $(2; +\infty)$;
- неположительна при всех $x \in \left(0; \dfrac{1}{2}\right]$.

Ответ: $x \in \left(0; \dfrac{1}{2}\right]$.

1.3.7. Простейшие показательные неравенства с переменным основанием

Это неравенства вида:

$$(a(x))^{f(x)} \vee (a(x))^{g(x)}. \qquad (21)$$

Неизвестное x содержится здесь и в основании $a(x)$ и в показателях $f(x)$, $g(x)$. Символ $\vee$ означает $>$, $\geq$, $<$ или $\leq$.

Показательно-степенную функцию $y = (a(x))^{f(x)}$ считают определённой только при $a(x) > 0$.

Букву «x» для краткости часто опускают и пишут:

$$a^f \vee a^g.$$

1.3.7.1. Строгое неравенство, два способа его решения

Рассмотрим два способа решения неравенства

$$\boxed{a^f > a^g.} \qquad (22)$$

1-й способ — традиционный — заключается в переборе всех допустимых значений основания $a(x)$, т.е.

$$a(x) > 1, \quad 0 < a(x) < 1, \quad a(x) = 1. \qquad (23)$$

Значение $a = 1$ не подходит для строгого неравенства (22), так как приводит к противоречию: $1 > 1$.

Для остальных допустимых значений a неравенство (22) решается по схеме:

$$\boxed{a^f > a^g \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1, \\ f > g \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 0 < a < 1, \\ f < g. \end{cases}} \qquad (24)$$

2-й способ. Перепишем предыдущую схему (24) в виде:

$$a^f > a^g \Leftrightarrow \begin{cases} a - 1 > 0, \\ f - g > 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} a - 1 < 0, \\ f - g < 0, \\ a > 0. \end{cases}$$

Последнюю совокупность можно упростить:

$$\boxed{a^f > a^g \Leftrightarrow \begin{cases} (f - g)(a - 1) > 0, \\ a > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{f - g}{a - 1} > 0, \\ a > 0. \end{cases}} \qquad (25)$$

Здесь использовано известное свойство произведения и частного двух выражений или чисел:

$$u = f - g, \quad v = a - 1.$$

Произведение uv положительно тогда и только тогда, когда оба сомножителя имеют одинаковый знак:

$$uv > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u > 0, \\ v > 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} u < 0, \\ v < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \frac{u}{v} > 0 \Leftrightarrow \frac{u}{v} > 0.$$

Сравнение двух способов.

Для решения неравенства (22)

$$\boxed{a^f > a^g.}$$

1-м способом, т.е. по схеме (24), надо:

- решить две системы;
- найти совокупность полученных решений.

2-й способ согласно схеме (25) требует решения только одной системы, причём первое неравенство образовано двумя множителями, что удобно для метода интервалов.

Чем сложнее исходное неравенство (22), тем большую экономию обещает 2-й способ (25).

Назовём 2-й способ эффективным и перепишем его в виде

$$\boxed{a^f - a^g > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (f - g)(a - 1) > 0, \\ a > 0. \end{cases}} \qquad (26)$$

Если исходное неравенство имеет вид:

$$a^f < a^g,$$

то эффективная схема его решения такова:

$$\boxed{a^f < a^g \;\Leftrightarrow\; a^f - a^g < 0 \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} (f-g)(a-1) < 0, \\ a > 0. \end{cases}} \qquad (27)$$

Разность функций $a^f - a^g$ заменена здесь разностью показателей $(f - g)$, которая «подправлена» отклонением $(a - 1)$ основания от 1.

Такая интерпретация облегчает составление системы (26), (27) во 2-м способе.

1.3.7.2. Нестрогое неравенство, два способа его решения

Нестрогое неравенство имеет вид:

$$a^f \geq a^g. \qquad (28)$$

Для его решения снова рассмотрим два способа, которые мы условно назвали традиционным и эффективным.

1-й способ, традиционный — перебор всех допустимых значений основания «a»:

$$a^f \geq a^g \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} a > 1, \\ f \geq g; \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 0 < a < 1, \\ f \leq g; \end{cases} \text{ или } \begin{cases} a = 1, \\ 1^f \geq 1^g. \end{cases} \qquad (29)$$

Здесь первые две системы обусловлены монотонностью показательной функции $y = a^t$, $a > 0$, $a \neq 1$.

Решением 3-й системы являются те корни уравнения $a(x) = 1$, при которых существуют (определены) обе функции $f(x)$, $g(x)$.

2-й способ — эффективный.

Из (29) имеем:

$$a^f \geq a^g \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} a - 1 > 0, \\ f - g \geq 0; \end{cases} \text{ или } \begin{cases} a > 0, \\ a - 1 < 0, \\ f - g \leq 0; \end{cases} \text{ или } \begin{cases} a = 1, \\ f, g - \text{существуют}. \end{cases}$$

Далее используем следующее свойство для выражений $u = f - g$, $v = a - 1$:

$$\begin{cases} u \geq 0, \\ v > 0; \end{cases} \text{ или } \begin{cases} u \leq 0, \\ v < 0; \end{cases} \;\Leftrightarrow\; \frac{u}{v} \geq 0.$$

Получим

$$\boxed{a^f \geq a^g \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} \dfrac{f-g}{a-1} \geq 0, \\ a > 0; \end{cases} \text{ или } \begin{cases} a = 1, \\ x \in D(f) \cap D(g). \end{cases}} \qquad (30)$$

Здесь к решениям первой системы надо добавить те корни уравнения $a = 1$, при которых определены функции $f(x)$ и $g(x)$.

Это добавление осуществляется заменой в первой системе неравенства $\frac{f-g}{a-1} \geq 0$, в котором $a \neq 1$, на неравенство $(f-g)(a-1) \geq 0$, в котором $a = 1$, допустимо.

После замены из (30) получим схему:

$$\boxed{a^f \geq a^g \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} (f-g)(a-1) \geq 0, \\ a > 0. \end{cases}} \qquad (31)$$

Схема (31) является более компактной записью схемы (30).

1.3.7.3. Обсуждение

Выпишем и обсудим полученные схемы решения строгих и нестрогих показательно-степенных неравенств (21):

$$a^f - a^g > 0 \;\Leftrightarrow\; a^f > a^g \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} (f-g)(a-1) > 0, \\ a > 0. \end{cases} \qquad (32)$$

$$a^f - a^g \geq 0 \;\Leftrightarrow\; a^f \geq a^g \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} (f-g)(a-1) \geq 0, \\ a > 0. \end{cases} \qquad (33)$$

Схемы (32), (33) идентичны. Главную роль в них играет функция:

$$N = (f-g)(a-1).$$

Она оказывается знакопостоянной (!) с функцией

$$M = a^f - a^g.$$

По-иному: разность показательно-степенных функций $M = a^f - a^g$ в исходных неравенствах (21) можно заменить функцией $N = (f-g)(a-1)$, т.е. разностью показателей $(f-g)$, «подправленной» отклонением $(a-1)$ основания от единицы.

Примечания. 1) Далее, в главе 7, в методе замены множителей функции M и N будут называться множителями. Мы будем пока привыкать к следующей терминологии: более сложные множители M можно заменять в неравенствах на более простые множители N, если множители (функции) M и N знакопостоянны (!) в ОДЗ и имеют в ней одинаковый набор корней. Замена таких множителей сохраняет равносильность, т.е. не искажает множество решений неравенства, но упрощает его.

2) Вывод схем (32), (33) не опирался на понятие «логарифм». Оно будет введено нами позже. Для читателя, знакомого с логарифмами, логарифмированием будет понятен следующий вывод схем (32), (33):

$$a^f \vee a^g \;\Leftrightarrow\; \lg a^f \vee \lg a^g \Leftrightarrow f \cdot \lg a \vee g \cdot \lg a \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (f-g)\lg a \vee 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (f-g)(a-1) \vee 0, \\ a > 0. \end{cases}$$

Здесь символ «$\vee$» означает «>», «≥», «<» или «≤».

1.3.8. Примеры

Рассмотрим конкретные простейшие показательно-степенные неравенства, решим их и 1-м способом (традиционным) и 2-м способом (эффективным).

1) *Решить строгое неравенство*: $(x-0{,}5)^{x^2-0{,}25} < 1$.

Решение. Уравняем основания в правой и левой частях неравенства. В области определения (при $x - 0{,}5 > 0 \Leftrightarrow x > 0{,}5$) имеем:

$$(x-0{,}5)^{x^2-0{,}25} < (x-0{,}5)^0.$$

1-й способ.

$$(x-0{,}5)^{x^2-0{,}25} < (x-0{,}5)^0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-0{,}5>1, \\ x^2-0{,}25<0; \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 0<x-0{,}5<1, \\ x^2-0{,}25>0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>1{,}5, \\ \overset{\oplus}{\left(x-\frac{1}{2}\right)}\overset{\oplus}{\left(x+\frac{1}{2}\right)}<0; \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 0{,}5<x<1{,}5, \\ \underset{\oplus}{\left(x-\frac{1}{2}\right)}\underset{\oplus}{\left(x+\frac{1}{2}\right)}>0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>1{,}5, \\ 1<0 - \text{неверно}; \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 0{,}5<x<1{,}5, \\ 1>0 - \text{верно}; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \varnothing \text{ или } \frac{1}{2}<x<\frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2}<x<\frac{3}{2}.$$

Пояснения. В первой системе, при $x > 1{,}5$, положительны оба числа $\left(x-\frac{1}{2}\right)$ и $\left(x+\frac{1}{2}\right)$. На них можно сократить; получаем противоречие $1 < 0$.

Во второй системе, при $\frac{1}{2}<x<\frac{3}{2}$, эти числа тоже положительны, но получаем верное неравенство $1 > 0$.

Ответ: $x \in \left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$.

2-й способ.

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^{x^2-\frac{1}{4}} < \left(x-\frac{1}{2}\right)^0 \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x^2-\frac{1}{4}-0\right)\left(x-\frac{1}{2}-1\right)<0, \\ x-\frac{1}{2}>0. \end{cases}$$

Здесь сформирована разность показателей: $\left(x^2-\frac{1}{4}\right)-0$. Эта раз-

ность «подправлена» отклонением основания $\left(x-\frac{1}{2}\right)$ от 1, т.е. множителем $\left(x-\frac{1}{2}-1\right)$. Далее имеем:

$$\begin{cases} \overset{\oplus}{\left(x+\frac{1}{2}\right)}\overset{\oplus}{\left(x-\frac{1}{2}\right)}\left(x-\frac{3}{2}\right)<0, \\ x>\frac{1}{2}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-\frac{3}{2}<0, \\ x>\frac{1}{2}; \end{cases} \underset{\text{(рис. 9)}}{\Leftrightarrow} \frac{1}{2}<x<\frac{3}{2}.$$

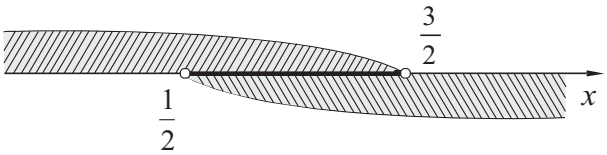

Рис. 9

Здесь учтено, что при $x>\frac{1}{2}$ оба числа $\left(x+\frac{1}{2}\right)$ и $\left(x-\frac{1}{2}\right)$ положительны.

Получили тот же ответ.

Ответ: $x \in \left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$.

2) *Решить соответствующее нестрогое неравенство*: $(x-0{,}5)^{x^2-0{,}25} \le 1$. Решение проделайте самостоятельно, получите ответ.

Ответ: $x \in \left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right]$.

Сравните его с ответом в предыдущем строгом неравенстве.

В следующем неравенстве изменено основание. Осваиваем 2-й способ его подробным описанием.

3) *Решить неравенство*: $x^{x^2-\frac{1}{4}} \ge 1$.

Решение проведём 2-м способом, предварительно уравняв основания.

В ОДЗ, т.е. при $x > 0$, имеем $1 = x^0$. Значит,

$$x^{x^2-\frac{1}{4}} \ge x^0.$$

Сформируем разность показателей

$$\left(x^2-\frac{1}{4}\right)-0.$$

Умножим её на $(x-1)$ — отклонение основания от единицы, получим:

$$x^{x^2-\frac{1}{4}} \geq x^0 \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x^2-\frac{1}{4}\right)(x-1) \geq 0, \\ x>0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overset{\oplus}{\left(x+\frac{1}{2}\right)}\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1) \geq 0, \\ x>0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\overset{\left(x+\frac{1}{2}>0\right)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1) \geq 0, \\ x>0; \end{cases} \overset{\text{(рис. 10)}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \leq \frac{1}{2}, \\ x \geq 1, \end{array}\right. \\ x>0; \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0<x \leq \frac{1}{2}, \\ x \geq 1. \end{array}\right.$$

На рис. 10 показано решение квадратного неравенства и решение системы.

Ответ: $x \in \left(0; \frac{1}{2}\right] \cup [1; +\infty)$.

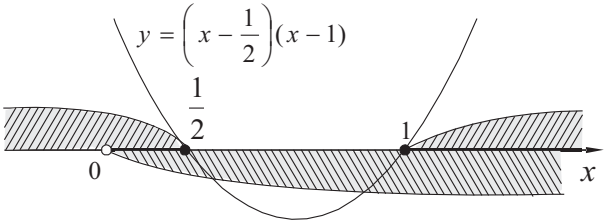

Рис. 10

4) *Решить двумя способами строгое неравенство*: $x^{\sqrt{x}} > \sqrt{x^x}$.

Решение 1-м способом.

Уравняем основания. Для этого учтём, что в ОДЗ, т.е. при $x > 0$, $\sqrt{x^x} = x^{\frac{x}{2}}$. Получим:

$$x^{\sqrt{x}} > x^{\frac{x}{2}}.$$

Далее перебираем возможные значения основания x и сравниваем показатели:

$$x^{\sqrt{x}} > x^{\frac{x}{2}} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1, \\ \sqrt{x} > \frac{x}{2}; \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 0<x<1, \\ \sqrt{x} < \frac{x}{2}; \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x=1, \\ 1>1 - \text{неверно} \end{cases} \Leftrightarrow$$

(сокращаем на $\sqrt{x} > 0$)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>1, \\ 1>\frac{\sqrt{x}}{2}; \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 0<x<1, \\ 1<\frac{\sqrt{x}}{2}; \end{cases} \text{ или } x \in \varnothing \Leftrightarrow$$

(учтём, что $1 > \frac{\sqrt{x}}{2} \Leftrightarrow \sqrt{x} < 2 \Leftrightarrow 0 \le x < 4$)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 1, \\ 0 \le x < 4; \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 0 < x < 1, \\ x > 4 - \text{неверно}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1, \\ 0 \le x < 4; \end{cases} \overset{\text{(рис. 11)}}{\Leftrightarrow} 1 < x < 4.$$

Ответ: $x \in (1; 4)$.

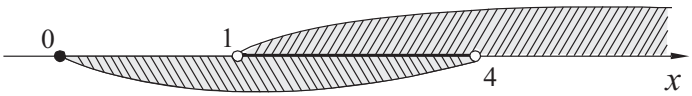

Рис. 11

Решение 2-м способом.

Снова уравняем основания:

$$x^{\sqrt{x}} > \sqrt{x^x} \overset{\text{ОДЗ: } x>0}{\Leftrightarrow} x^{\sqrt{x}} > x^{\frac{x}{2}}.$$

Далее сформируем разность показателей $\left(\sqrt{x} - \frac{x}{2}\right)$, умножим её на $(x - 1)$ — на отклонение основания от единицы, получим:

$$x^{\sqrt{x}} > x^{\frac{x}{2}} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\sqrt{x} - \frac{x}{2}\right)(x-1) > 0, \\ x > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x}\left(1 - \frac{\sqrt{x}}{2}\right)(x-1) > 0, \\ x > 0; \end{cases} \overset{(\sqrt{x}>0)}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2 - \sqrt{x})(x-1) > 0, \\ x > 0; \end{cases} \overset{\text{(рис. 12)}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 1 < x < 4, \\ x > 0; \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x < 4.$$

Пояснения (рис. 12).

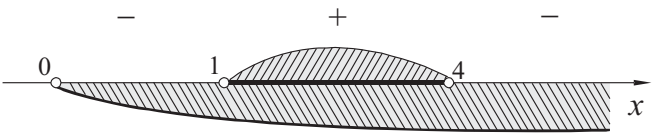

Рис. 12

Функция $y = (2 - \sqrt{x}) \cdot (x - 1)$:

- имеет два корня $x = 1$, $x = 4$;
- положительна только при $x \in (1; 4)$.

Ответ: $x \in (1; 4)$.

5) *Решить двумя способами соответствующее нестрогое неравенство*: $x^{\sqrt{x}} \ge \sqrt{x^x}$.

Решение 1-м способом.

Перебираем возможные значения основания.

$$x^{\sqrt{x}} \ge x^{\frac{x}{2}} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1, \\ \sqrt{x} \ge \dfrac{x}{2}; \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 0 < x < 1, \\ \sqrt{x} \le \dfrac{x}{2}; \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x = 1, \\ 1 \ge 1 - \text{верно} \end{cases} \overset{(\sqrt{x}>0)}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 1, \\ 1 \ge \dfrac{\sqrt{x}}{2} \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 0 < x < 1, \\ 1 \le \dfrac{\sqrt{x}}{2}; \end{cases} \text{ или } x = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1, \\ x \le 4; \end{cases} \text{ или}$$

$$\begin{cases} 0 < x < 1, \\ \sqrt{x} \ge 2 - \text{неверно} \end{cases} \text{ или } x = 1 \Leftrightarrow 1 < x \le 4 \text{ или } x = 1 \Leftrightarrow 1 \le x \le 4.$$

Ответ: $x \in [1; 4]$.

Решение 2-м способом.

Формируем разность показателей $\left(\sqrt{x} - \dfrac{x}{2}\right)$, умножаем её на $(x - 1)$ — отклонение основания от единицы, получаем:

$$x^{\sqrt{x}} \ge x^{\frac{x}{2}} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\sqrt{x} - \dfrac{x}{2}\right)(x-1) \ge 0, \\ x > 0; \end{cases} \overset{(\sqrt{x}>0)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \left(1 - \dfrac{\sqrt{x}}{2}\right)(x-1) \ge 0, \\ x > 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2 - \sqrt{x})(x-1) \ge 0, \\ x > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \le x \le 4, \\ x > 0; \end{cases} \Leftrightarrow x \in [1; 4].$$

Интервалы законопостоянства функции $y = (2 - \sqrt{x})(x - 1)$ показаны ранее на рис. 12.

Здесь в решение включены её корни $x = 1$, $x = 4$.

Ответ: $x \in [1; 4]$.

Комментарий. Получим решение нестрогого неравенства $x^{\sqrt{x}} \ge \sqrt{x^x}$ как совокупность решений строгого неравенства $x^{\sqrt{x}} > \sqrt{x^x}$, которое мы знаем, и соответствующего уравнения $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x^x}$, которое мы тоже знаем из п. 1.3.4. Имеем:

$$x^{\sqrt{x}} \ge \sqrt{x^x} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^{\sqrt{x}} > \sqrt{x^x}, \\ x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x^x}; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in (1;4), \\ x = 1, \\ x = 4; \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in [1; 4].$$

К интервалу $(1; 4)$ добавились его концы и получили тот же ответ.

Ответ: $x \in [1; 4]$.

Следующее неравенство предлагалось на вступительном экзамене в 1963 г. на механико-математическом факультете МГУ имени М.В. Ломоносова.

6. *Решить неравенство*: $(x^2 + x + 1)^x < 1$.

Решение 2-м способом.

а) Трёхчлен $x^2 + x + 1 > 0$ при всех $x \in R$, так как его дискриминант $D = 1 - 4 = -3 < 0$, рис. 13.

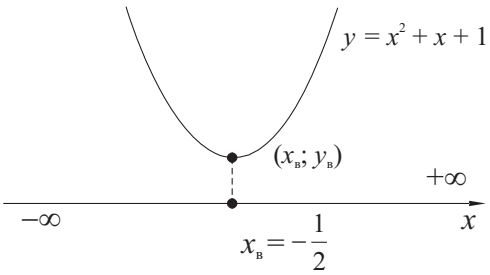

Рис. 13

Координаты вершины:

$$\begin{cases} x_в = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{1}{2\cdot 1} = -\dfrac{1}{2}, \\ y_в = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{2} + 1 = \dfrac{3}{4} > 0. \end{cases}$$

ОДЗ: $x \in R$ и в ОДЗ $1 = (x^2 + x + 1)^0$.

Получаем сравнение степеней с одинаковыми основаниями

$$(x^2 + x + 1)^x < (x^2 + x + 1)^0.$$

б) Формируем разность показателей $(x - 0)$, отклонение основания от единицы

$$x^2 + x + 1 - 1 = x^2 + x = x(x + 1);$$

переходим к равносильной системе:

$$(x^2 + x + 1)^x < (x^2 + x + 1)^0 \Leftrightarrow \begin{cases} (x-0)(x^2 + x + 1 - 1) < 0, \\ x^2 + x + 1 > 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2(x+1) < 0, \\ x \in R; \end{cases} \Leftrightarrow x^2(x + 1) < 0 \Leftrightarrow x + 1 < 0 \Leftrightarrow x < -1.$$

Учли, что $x = 0$ не входит в число решений, и сократили на $x^2 > 0$.

Ответ: $x \in (-\infty; -1)$.

Комментарий. Если бы экзаменаторы предложили нестрогое неравенство $(x^2 + x + 1)^x \le 1$, то нас подстерегала бы типовая ошибка — потеря изолированного решения $x = 0$. Действительно, тогда:

$$(x^2 + x + 1)^x \le (x^2 + x + 1)^0 \Leftrightarrow x^2(x + 1) \le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x \le -1. \end{array}\right.$$

Ответ: $x = 0$, $x \in (-\infty; -1]$.

Для наглядности на рис. 14 показаны интервалы знакопостоянства функции $y = x^2(x + 1)$ и эскиз ее графика.

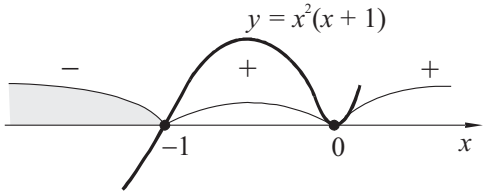

Рис. 14

1.3.9. Выводы

Мы рассмотрели:

- показательную функцию $y = a^x$, $a > 0$, $a \ne 1$, её график и свойства;
- решение простейших показательных уравнений и неравенств с постоянным и переменным основанием вида:
$$a^{f(x)} \vee a^{g(x)}; \qquad (a(x))^{f(x)} \vee (a(x))^{g(x)};$$
- отдельно выделили случай $a(x) = 1$;
- изучили эффективный способ решения показательно-степенных неравенств:
$$(a(x))^{f(x)} \ge (a(x))^{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} (f(x) - g(x))(a(x) - 1) \ge 0, \\ a(x) > 0; \end{cases}$$
$$(a(x))^{f(x)} > (a(x))^{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} (f(x) - g(x))(a(x) - 1) > 0, \\ a(x) > 0. \end{cases}$$

Большинство уравнений, неравенств со степенями сводятся к простейшим показательным уравнениям, неравенствам, которые здесь были подробно рассмотрены.

Далее рассмотрим понятие «логарифм», логарифмические формулы и их особенности, преобразование логарифмических выражений (глава 2), простейшие логарифмические неравенства с постоянным и переменным основанием (глава 3).

Оглавление

Предисловие 3
Глава 1. Показательная функция, простейшие показательные и показательно-степенные уравнения и неравенства 6
1.1. Показательная функция 6
1.1.1. Определение 6
1.1.2. График показательной функции 6
1.1.3. Основные свойства степеней 8
1.2. Свойства показательной функции 8
1.2.1. Область определения 8
1.2.2. Область (множество) значений 8
1.2.3. Примеры (уравнения, неравенства) на области определения и множество значений. 8
1.2.4. Неподвижная точка (0; 1) 9
1.2.5. Монотонное возрастание при $a > 1$ 9
1.2.6. Монотонное убывание при $0 < a < 1$ 10
1.3. Простейшие показательные уравнения и неравенства 10
1.3.1. Показательные уравнения с постоянным основанием . . . 11
1.3.2. Примеры 11
1.3.3. Простейшие показательные уравнения с переменным основанием 13
1.3.4. Примеры 14
1.3.5. Простейшие показательные неравенства с постоянным основанием 17
1.3.6. Примеры 18
1.3.7. Простейшие показательные неравенства с переменным основанием 19
1.3.8. Примеры 23
1.3.9. Выводы 29
Глава 2. Логарифм: определение, основные и дополнительные формулы, особенности их применения, действия с логарифмами 30
2.1. Введение 30
2.2. Определение логарифма 30

2.2.1. Потребность в новом термине 30
2.2.2. Определение логарифма в частном случае 31
2.2.3. Определения логарифма в общем случае 32
2.2.4. Допустимые значения логарифма $\log_a b$ и его
констант «b» и «a» 33
2.2.5. Единственность решения показательного уравнения
$a^x = b$, где $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$ 33
2.2.6. Обобщение 34
2.2.7. Логарифмы и решение показательного уравнения 35
2.2.8. Основное логарифмическое тождество 36
2.2.9. Правило и три тождества 37
2.2.10. Три способа решения показательного уравнения
$a^x = b$, $b > 0$, $0 < a \neq 1$ 38
2.3. Основные формулы и особенности их применения 38
2.3.1. Общие замечания 38
2.3.2. Основное логарифмическое тождество 39
2.3.3. Формулы логарифма произведения и частного 40
2.3.4. Примеры 44
2.3.5. Формула для логарифма степени 47
2.3.6. Пример 48
2.3.7. Переход к новому основанию 48
2.3.8. Выводы 49
2.4. Дополнительные формулы 50
2.4.1. Первая формула 50
2.4.2. Вторая формула 51
2.4.3. Третья формула 51
2.4.4. Четвёртая формула 52
2.4.5. Пятая формула 52
2.4.6. Выводы 53
2.5. Действия с логарифмами 54
2.5.1. Типовые задачи на вычисления 54
2.5.2. Более сложные задачи на вычисление и упрощение 56
2.5.3. Некоторые задачи о нахождении логарифмов 63
2.6. Выводы 64
Глава 3. Логарифмы в решении показательных уравнений
и неравенств 65
3.1. Предварительные замечания 65
3.2. Показательные уравнения и неравенства вида $a^{f(x)} \vee b$ . . . 66
3.3. Метод уравнивания оснований 70

3.4. Метод введения новой переменной 77
3.5. Однородные уравнения 80
3.6. Выводы 84
Глава 4. Логарифмическая функция, простейшие логарифмические уравнения и неравенства с постоянным и переменным основанием 85
4.1. Определение 85
4.2. График логарифмической функции 85
4.3. Свойства логарифмической функции $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$. 87
4.4. Простейшие логарифмические уравнения и неравенства с постоянным основанием логарифмов 90
4.4.1. Простейшие логарифмические уравнения 91
4.4.2. Примеры 95
4.4.3. Выводы 99
4.4.4. О равенстве значений монотонных и немонотонных функций 99
4.4.5. Простейшие логарифмические неравенства. 103
4.4.6. Примеры 105
4.5. Простейшие логарифмические уравнения с переменным основанием логарифмов. 109
4.5.1. Методика и схема решения 109
4.5.2. Примеры 110
4.6. Простейшие логарифмические неравенства с переменным основанием логарифмов. 113
4.6.1. Строгое неравенство 113
4.6.2. Нестрогое неравенство 115
4.6.3. Основные результаты 116
4.6.4. Сравнение схем 116
4.6.5. Примеры 117
4.7. Функция; прямая и обратная функции. 125
4.7.1. Определение и основные сведения о функции, график функции 125
4.7.2. Требование единственности от x к y в определении функции 126
4.7.3. Непрерывность функции, её интервалы знакопостоянства 128
4.7.4. Свойства непрерывной функции на отрезке. 129
4.7.5. Свойство строго монотонной функции — однозначность от y к x. Понятие об обратной функции 130

4.7.6. Правила (методика) получения обратной функции в осях $(x; y)$ . . . 131
4.7.7. Примеры . . . 133
4.7.8. Выводы по п. 4.7 . . . 135
4.8. Выводы по главе 4 . . . 136
Глава 5. Уравнения и неравенства с логарифмами и степенями, сведение их к простейшим уравнениям и неравенствам . . . 137
5.1. Введение . . . 137
5.2. Задачи на основные логарифмические формулы и анализ типовых ошибок . . . 137
5.2.1. Формулы для логарифма произведения и частного . . . 137
5.2.2. Формула перехода к новому основанию . . . 139
5.2.3. Формула $\log_{a^{2k}} b^{2n} = \frac{n}{k} \log_{|a|} |b|$ . . . 141
5.2.4. Определение логарифма . . . 141
5.2.5. Основное логарифмическое тождество $a^{\log_a b} = b$ . . . 149
5.3. Уравнения и неравенства вида $\log_a \log_b g(x) \vee c$ . . . 150
5.3.1. Общие замечания, план решения . . . 150
5.3.2. Конкретные задачи . . . 151
5.4. Метод введения новой переменной . . . 152
5.4.1. Общие замечания, суть метода . . . 152
5.4.2. Примеры . . . 153
5.5. Логарифмирование и потенцирование . . . 165
5.5.1. Терминология, общие замечания и напоминания . . . 165
5.5.2. Примеры . . . 166
5.6. Сравнение и оценка логарифмов . . . 171
5.7. Уравнения и неравенства повышенной сложности . . . 183
5.8. Выводы . . . 191
Глава 6. Четыре показательно-степенных уравнения и способы их решения . . . 192
6.1. Введение . . . 192
6.2. Первое уравнение и три способа его решения . . . 192
6.3. Второе уравнение и три способа его решения . . . 197
6.4. Третье уравнение и два способа его решения . . . 199
6.5. Четвёртое уравнение и два способа его решения . . . 201
6.6. Выводы . . . 202
Глава 7. Метод замены множителей . . . 204
7.1. Введение, общие замечания . . . 204
7.2. Основная идея метода замены множителей . . . 205

7.3. Разъясняющие примеры 207
7.4. Источники простых множителей. 210
7.5. Показательная функция $y = a^t$, $a > 0$, $a \neq 1$. 210
7.6. Логарифмическая функция $y = \log_a t$ 212
7.7. Функция $y = \sqrt{t}$ 213
7.8. Функция $y = t^2$, $t \geq 0$ 213
7.9. Примеры 214
7.10. Предварительные выводы 216
7.11. Сводка важнейших замен, таблица 217
7.12. Описание таблицы 219
7.13. Примеры; иллюстрация таблицы 220
7.14. Первое неравенство 230
7.15. Второе неравенство 233
7.16. Третье неравенство 236
7.17. Четвёртое неравенство 240
7.18. Пятое неравенство 241
7.19. Шестое неравенство 244
7.20. Седьмое неравенство 246
7.21. Восьмое неравенство 248
7.22. Система. 249
7.23. Выводы 250
Глава 8. Метод перебора ОДЗ 252
8.1. Метод перебора ОДЗ в стандартных задачах 252
8.2. Метод перебора ОДЗ в задачах повышенной сложности. . 256
8.2.1. Неравенство с логарифмом 256
8.2.2. Неравенство со степенью 264
8.2.3. Неравенства с «арками» 268
8.2.4. Обсуждение 270
8.3. Выводы 271
Глава 9. Задачи для самостоятельного решения; примеры решения задач с параметром 272
9.1. Решить показательные уравнения 272
9.2. Решить показательные неравенства 273
9.3. Решить логарифмические уравнения 274
9.4. Решить логарифмические неравенства 275
9.5. Вычислить, упростить логарифмические выражения. . . . 277
9.6. Решить более сложные задачи со степенями и логарифмами 278
9.6.1. Решить уравнение, неравенства 278

9.6.2. Определить графически число корней уравнения 280
9.7. Примеры решения задач с параметром 281
Заключение 287
Литература 289