Л. С. Сагателова

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

7—11 классы

Москва
ИЛЕКСА
2026

УДК 372.851:514.122.1
ББК 22.151.5:74.2025я721
С34

Сагателова Л. С.

С34 Теория вероятностей. 7—11 классы / Л. С. Сагателова — М. : Илекса, 2026. — 208 с. : ил.

ISBN 978-5-89237-745-4

Учебное пособие содержит основные теоретические сведения, примеры решения задач, краткие методические рекомендации, задачи для самостоятельного решения с ответами и диагностические работы. Пособие адресовано учащимся 7—9 классов в рамках учебного курса «Вероятность и статистика», а также 10—11 классов, в том числе при подготовке к ЕГЭ, учителям математики, методистам, студентам педагогических вузов и репетиторам.

УДК 372.851:514.122.1
ББК 22.151.5:74.2025я721

Учебное издание

Сагателова Лиана Сергеевна

Теория вероятностей

7—11 классы

Подписано в печать 02.12.2025.
Формат 60×88/16. Усл. печ. л. 7,82.
Тираж 1000 экз. Заказ

ООО «Илекса»
+7(964) 534-80-01
real-ilexa@yandex.ru
www.ilexa.ru

ISBN 978-5-89237-745-4

ВВЕДЕНИЕ

Чума гуляет по Европе,
Но разве Бог не справедлив?
Он подвергает Землю року,
В ней лотереи сотворив.

Ф. Харди

Замечательно, что наука, которая началась с рассмотрения азартных игр, обещает стать наиболее важным объектом человеческого знания... Ведь по большей части важнейшие жизненные вопросы являются на самом деле лишь задачами теории вероятностей.

П. С. Лаплас

Теория вероятностей — один из наиболее важных прикладных разделов математики. Многие явления окружающего нас мира поддаются описанию только с помощью теории вероятностей. При изучении теории вероятностей обогащаются представления о современной картине мира и методах его исследования, закладываются основы вероятностно-статистического мышления. Умения воспринимать и критически анализировать информацию, понимать вероятностный характер многих реальных зависимостей, производить простейшие вероятностные расчёты необходимы для развития функциональной грамотности. Теория вероятностей, зародившаяся в трудах Б. Паскаля, Я. Бернулли, П. Лапласа и других, является математической основой статистики — науки, без применения которой уже не мыслится принятие даже сколько-нибудь значимых решений по самым разнообразным проблемам в социокультурной, образовательной и научно-производственной сферах человеческой деятельности. Этим обусловлена актуальность изучения основ теории вероятностей в школьном курсе математики. Её преподают в школах многих стран, в России она возвращена в школу стандартом 2004 г., и изучение стохастической содержательной линии (стохастика — наука, соединяющая элементы теории вероятностей и математической статистики) в курсе математики является обязательным. В 2012 г. задачи с вероятностным содержанием включены в выпускной экзамен основной и старшей школы. Последние годы международные исследования математической и функциональной грамотности школьников содержат всё больше заданий на представление данных, оценку правдоподобности гипотез и вероятностей событий. Приказом Министерства просвещения Российской Федерации от 31.05.2021 № 287 был утверждён ФГОС, где математика разделена на три учебных раздела «Алгебра», «Геометрия», «Вероятность и статистика».

Концепция развития математического образования определяет три уровня изучения математики и итоговых требований:

- математика для жизни;
- математика для применения в профессии;
- творческая математика.

Курс «Вероятность и статистика» предназначен для формирования у обучающихся статистической культуры и понимания роли теории вероятностей как математического инструмента для изучения случайных событий, величин и процессов.

Учащиеся и учителя испытывают определённые трудности при изучении теории вероятностей, связанные с отсутствием глубоких традиций преподавания. Кроме того, само содержание вероятностно-статистической линии требует от учителя использование новых методических подходов, технологий и видов учебной деятельности.

При написании пособия автор постарался изложить предмет наиболее просто и наглядно, чтобы предлагаемое учебно-методическое пособие было полезно и ученику практически любого уровня подготовки, и учителю, и репетитору.

Пособие содержит основные теоретические сведения, краткие методические рекомендации, подробные решения, задания для устных упражнений, контрольные вопросы, которые помогут проверить теоретическое освоение курса, большое количество задач для самостоятельного решения с ответами, а также варианты тестов и диагностических работ для подготовки к ГИА.

Данное пособие при необходимости позволит в кратчайшие сроки восполнить пробелы в знаниях выпускников и подготовиться к экзамену.

1. ПРЕДМЕТ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Согласно ФГОС основного общего образования, изучение стохастической содержательной линии в курсе математики является обязательным. *Стохастика* — наука, соединяющая элементы теории вероятностей и математической статистики, нашла применение практически во всех областях знания. Этот материал необходим прежде всего для формирования у учащихся функциональной грамотности — умения воспринимать и критически анализировать информацию, представленную в различных формах и источниках, понимать вероятностный характер многих реальных зависимостей, производить простейшие вероятностные расчёты.

Основные цели изучения теории вероятностей и статистики могут быть следующими:

- знакомство с элементами теории вероятностей и статистикой как адекватным средством описания явлений реального мира путём построения и изучения их стохастических моделей;
- развитие навыков вероятностно-статистического аспекта «прикладного» мышления при решении задач по курсу теории вероятностей и математической статистики;
- повышение уровня математической культуры учащихся на основе применения аппарата теории вероятностей в процессе обучения.

Изучение элементов теории вероятностей должно сформировать у учащихся общие представления о случайности, вероятности и об их месте в окружающем мире. Следует заметить, что математический аппарат теории вероятностей базируется на элементарных математических знаниях, умениях и навыках, которые должны быть уже у учеников сформированы. Поэтому теория вероятностей может рассматриваться как раздел математики, при изучении которого ученики имеют возможность увидеть конкретные применения полученных ими математических знаний при изучении прикладной теории, весьма важной для практической деятельности человека.

В зависимости от профиля обучения математике уровень математической абстракции изучаемого материала темы «Теория вероятностей» может быть различным.

Окружающий нас мир полон случайностей. Это землетрясения и ураганы, подъёмы и спады экономического развития, войны, болезни, случайные встречи и многое, многое другое. Для комфортной жизнедеятельности важно научиться измерять случайности.

Теория вероятностей есть математическая наука, изучающая закономерности, присущие случайным явлениям. При этом теория вероятностей рассматривает не сами реальные явления, а их упрощённые схемы — математические модели. Таким образом, предметом теории вероятностей являются математические модели случайных явлений. Случайное явление — это такое явление, которое при неоднократном воспроизведении одного и того же опыта протекает каждый раз несколько по-иному. Совершенно очевидно, что в природе нет ни одного физического явления, в котором не присутствовали бы в той или иной мере элементы случайности. Как бы точно и подробно ни были зафиксированы условия опыта, невозможно достигнуть того, чтобы при повторении опыта результаты полностью и в точности совпадали. Случайные отклонения неизбежно сопутствуют любому закономерному явлению. Практика показывает, что, наблюдая за однородными случайными явлениями, мы обычно обнаруживаем в них вполне определённые закономерности, своего рода устойчивости, свойственные именно массовым случайным явлениям. Например, если многократно подбрасывать монету, частота появления герба (отношение числа появившихся гербов к общему числу бросаний) постепенно стабилизируется, приближаясь к вполне определённому числу, именно к $\frac{1}{2}$. Такое же свойство «устойчивости частот» обнаруживается и при многократном повторении любого другого опыта, исход которого представляется заранее неопределённым, случайным. Подобные специфические, так называемые «статистические закономерности» наблюдаются всегда, когда мы имеем дело с однородными случайными явлениями. Именно эти закономерности являются предметом изучения теории вероятностей. Цель теории вероятностей — осуществление прогноза в области случайных явлений, влияние на ход этих явлений — контроль и ограничение случайностей. Без знаний понятий и методов теории вероятностей и статистики невозможна организация эффективного конкурентоспособного производства, проведение обоснованной социальной политики, внедрение нововведений в различные сферы жизни.

ИСТОРИЧЕСКАЯ СПРАВКА

> Случай играет в мире столь большую роль, что и без моей помощи он позаботится о себе.
>
> *А. Дюма*

Теория вероятностей возникла в середине XVII столетия, причём её появление связывают с именами П. Ферма (1601—1665), Б. Паскаля (1623—1662) и X. Гюйгенса (1629—1695). Отправным пунктом исследований являлись задачи, связанные с азартными играми, особенно играми в кости и в карты, поскольку при их изучении можно ограничиваться простыми и понятными математическими моделями. X. Гюйгенс в сочинении «О расчётах при игре в кости», опубликованном в 1657 г., писал: «...думаю, при внимательном изучении предмета читатель заметит, что имеет дело не только с игрой, но что здесь закладываются основы очень интересной и глубокой теории». «Математика случая» — так ещё в XVII в. назвал теорию вероятностей один из её основателей, французский учёный Блез Паскаль. Б. Паскаль впервые употребил слово «вероятность». В письме к П. Ферма он писал: «Я буду пользоваться термином «вероятность» для обозначения числа, обозначающего степень уверенности». Значительное влияние на развитие теории вероятностей оказали Я. Бернулли (1655—1705), А. Муавр (1667—1754), Т. Байес (1702—1761), П. Лаплас (1749—1827), К. Гаусс (1777—1855), С. Пуассон (1781—1840). Я. Бернулли принадлежит первое доказательство одного из важнейших положений теории вероятностей — так называемого «закона больших чисел» — теоремы, устанавливающей связь между вероятностью события и частотой его появления.

Развитие теории вероятностей тесно связано с традициями и достижениями русской науки. Фундаментальные результаты были получены П. Л. Чебышевым (1821—1894), А. М. Ляпуновым (1857—1918), позже большой вклад в её развитие внесли Е. Е. Слуцкий (1880—1948), А. А. Марков (1856—1922), А. Н. Колмогоров (1903—1987) и др.

1.1. СОБЫТИЕ. КЛАССИФИКАЦИЯ СОБЫТИЙ

Каждая наука, развивающая общую теорию какого-либо круга явлений, содержит ряд основных понятий, на которых она базируется. Например, в геометрии — понятия точки, прямой, линии; в физике — понятия силы, массы, скорости, ускорения и т. д. Такие основные понятия существуют и в теории вероятностей. В качестве первого из них введём понятие «события».

Под «**событием**» в теории вероятностей понимается всякий факт (явление), который в результате эксперимента (опыта, испытания) может произойти или не произойти. События принято обозначать большими буквами латинского алфавита: A, B, C....

Эксперимент (опыт, испытание) заключается в наблюдении за объектами или явлениями в строго определённых условиях и измерении значений заранее определённых признаков этих объектов (явлений). Эксперимент называют статистическим, если он может быть повторён в практически неизменных условиях неограниченное число раз. Эксперимент (опыт, испытание) называется стохастическим, если его результат заранее (до его проведения) предугадать нельзя. Например, подбрасывая монету, мы отмечаем, какой стороной она упала. Условия эксперимента: одна и та же монета, одна и та же поверхность, на которую бросаем монету, отсутствие сильных внешних воздействий (порывов ветра, магнитных полей и т. п.). Наблюдаемый признак: сторона монеты после её падения имеет два возможных значения («орёл» или «решка»; их можно обозначать либо О и Р, либо 1 и 0, то есть перевести в цифровую форму). Эксперимент можно повторять любое число раз, ничего в нём не меняя, практически в одних и тех же условиях.

Математическая монета — «идеальная» монета (математическая модель реальной монеты), которая падает вверх либо орлом с вероятностью $\frac{1}{2}$ либо решкой с вероятностью $\frac{1}{2}$. Все свойства настоящей монеты — размер, материал, достоинство — для математической монеты несущественны. Математическую монету ещё называют симметричной монетой. Решка (решётка) — лицевая сторона монеты (аверс), орёл — обратная сторона монеты (реверс).

Исходом эксперимента называют значение наблюдаемого признака, непосредственно полученное по окончании эксперимента. Каждый эксперимент заканчивается одним и только одним исходом. Таким образом, событие — есть исход, обладающий заранее указанным свойством или признаком в наблюдаемом эксперименте. Поскольку таким свойством могут обладать несколько исходов, то одно и то же событие может появиться при разных исходах эксперимента, а при других исходах событие не появится. Более того, если мы определим несколько разных событий в данном эксперименте, которые могут появиться одновременно, то исход, которым закончился эксперимент, обладает сразу несколькими свойствами, соответствующими разным событиям.

Следует хорошо отличать события от исходов. Следует также иметь в виду, что в конкретном эксперименте могут появляться не любые события, а только такие, которые могут быть определены через свойства исходов этого эксперимента, и количество событий, возможных в данном эксперименте, не произвольно, а определяется числом исходов эксперимента.

Чёткое определение и разграничение при проведении реальных физических экспериментов таких понятий, как исход эксперимента и событие, возможные в эксперименте, в дальнейшем помогут избежать многих трудностей при введении понятия «вероятность случайного события».

В теории вероятностей понятие «событие» неразрывно связано с теоретико-множественными представлениями (см. приложение 1). В частности, по определению, под событием понимается любое подмножество множества элементарных исходов. Следовательно, для корректного введения определения этого понятия необходимо, чтобы учащиеся были знакомы с элементами теории множеств, которая является теоретической основой теории вероятностей. Изучение теории множеств в школьном курсе математики предусмотрено ФГОС ООО.

Наиболее предпочтительным при изучении основных понятий теории вероятностей представляется логически обусловленный путь — на базе необходимых понятий теории множеств вводятся основные понятия теории вероятностей.

Изучение понятия «событие» сопряжено у учащихся с трудностями психологического характера. Его ученики обычно воспринимают в контексте «бытовой» лексики, связывая его с неким единичным бытовым актом, локализованным в пространстве и времени. В соответствии же с определением понятия «событие» наряду с единичным актом надо мыслить и некоторое их множество, с числом элементов, бóльшим или равным единице. Далее необходимо чётко разграничить понятия «эксперимент» («опыт») и «событие» (как мы уже писали выше) как некоторого исхода события, наблюдаемого в эксперименте и обладающего заранее указанным свойством или признаком. Для учащихся понятия «эксперимент» и «событие» часто совпадают.

Формирование представления о понятии «событие» начинается с рассмотрения простейших вероятностных моделей — подбрасывание игральной кости, извлечение шаров из урны, извлечение карт из колоды, стрельба по мишени — и формирования на интуитивном уровне понятия «элементарный исход».

Пример 1. Бросаем шестигранный игральный кубик. Условия: один кубик, одна поверхность, отсутствие сильных внешних воздействий (кроме притяжения Земли и движения руки, бросающей кубик). Исходы эксперимента — номер грани кубика, оказавшейся сверху после его падения. Возможно 6 разных исходов. Определим события:

- А — «выпало чётное число очков (исходы 2, 4 и 6)»;
- В — «выпало число очков, кратное 3 (исходы 3, 6)»;
- С — «выпало более 4 очков (исходы 5, 6)».

Бросаем кубик. Если выпадет 1 очко, то не произойдёт ни одно из интересующих нас событий (то есть эксперимент может закончиться без появления каких-то событий, но он никогда не может закончиться без появления одного из исходов). Если выпадет два очка, то произойдёт только одно событие A. Если выпадет 6 очков, то произойдут сразу три события A, B и C, то есть эксперимент может закончиться появлением сразу нескольких событий, но он никогда не может закончиться появлением сразу нескольких исходов.

Математический игральный кубик (кость) — «идеальный» игральный кубик (математическая модель реальной игральной кости), для которого вероятность выпадения любой грани равна $\frac{1}{6}$. Математическая кость является симметричной.

События, происходящие при реализации определённого комплекса условий или в результате эксперимента, называются **элементарными событиями**. Множество всех элементарных событий или исходов случайного эксперимента называется **пространством элементарных событий** (ПЭС) $\Omega = \{\omega\}$, где ω — элементарные события. Элементарные события, при которых интересующее нас событие наступает, называются **благоприятствующими** этому событию.

Случайным называется событие, которое может произойти, а может и не произойти при осуществлении данного комплекса условий. Можно выделить типы (виды) случайных событий.

Достоверным называется событие, которое непременно должно произойти при осуществлении данного комплекса условий. Например, брошен игральный кубик (кость), то выпадение не менее одного и не более шести очков является достоверным событием. Обозначение Ω — достоверное событие.

Невозможным называется событие, которое заведомо не произойдёт в результате проведения опыта. Обозначение $\varnothing$ — невозможное событие. В опыте с кубиком невозможное событие — выпадение числа, большего 6.

Совместными называются события, которые могут появиться одновременно в данном стохастическом эксперименте. Например, если из урны с белыми и чёрными шарами извлекается 2 шара, то появления чёрного и белого шаров являются совместными событиями.

Несовместными событиями в данном опыте называются события, которые не могут появиться вместе. Примеры несовместных событий:

1) выпадение герба и выпадение решки при бросании монеты; 2) попадание и промах при одном выстреле.

Событие называется **единственно возможным**, если его появление в результате испытания является достоверным событием. К примеру, если стрелок произвёл выстрел по цели, то обязательно произойдёт одно из двух событий — попадание или промах. Тогда событие — произошло попадание или промах — является единственно возможным.

Равновозможными называются события, если есть основания считать, что ни одно из них не является более возможным, чем другие. Примеры равновозможных событий: 1) выпадение герба и выпадение решки при бросании монеты; 2) появление 1, 3, 4, 5 очков при бросании игральной кости; 3) появление карты бубновой, червовой, трефовой масти при вынимании карты из колоды;

Противоположным событию A называется событие $\bar{A}$, которое происходит тогда и только тогда, когда не происходит событие A. События A и $\bar{A}$ несовместны. Например, «выпало чётное число» и «выпало нечётное число» — события несовместные и противоположные.

События A_1, A_2, ..., A_n, образуют **полную группу (полную систему)** событий, если эти события попарно несовместны, а их сумма достоверна, то есть обязательно происходит хотя бы одно из этих событий при каждом испытании. Например: 1) выпадение герба и выпадение решки при бросании монеты; 2) попадание и промах при выстреле; 3) появление 1, 2, 3, 4, 5, 6 очков при бросании игральной кости.

Два события составляют полную группу событий только тогда, когда они взаимно противоположны $A + \bar{A} = \Omega$.

З а м е ч а н и е. Не все случайные события можно изучать методами теории вероятностей, а лишь те, которые могут быть воспроизведены в одних и тех же условиях.

Упражнения

1. Укажите достоверные, невозможные, случайные события среди следующих:

1) A — «два попадания при трёх выстрелах»;

2) D — «появление не более 18 очков при подбрасывании трёх игральных костей»;

3) B — «число, составленное из цифр 1, 3, 7 делится на 5»;

4) C — «опоздание пассажирского поезда “Волгоград — Москва” на 20 минут»;

5) M — «получение слова “ров” при случайном выборе карточек, на которых написаны буквы “в”, “с”, “я”, “р”, “к”»;

6) закипание воды при 25 градусах Цельсия;

7) выигрыш в беспроигрышную лотерею;

8) падение бутерброда маслом вниз.

2. Для каждого из указанных событий определите, каким оно является: достоверным, невозможным, случайным. Бросают две игральные кости:

1) A — «на первой кости выпало 3 очка, а на второй — 5 очков»;

2) B — «сумма выпавших на двух костях очков равна 13»;

3) C — «на обеих костях выпало по 3 очка»;

4) D — «сумма очков на двух костях не больше 12».

3. Для каждого из указанных событий определите, каким оно является: достоверным, невозможным, случайным. Вы открыли книгу на любой странице и прочитали первое попавшееся существительное. Оказалось, что:

1) A — «в написании слова есть гласная буква»;

2) B — «в написании слова есть буква “о”»;

3) C — «в написании слова нет гласных букв»;

4) D — «в написании слова есть мягкий знак».

4. В коробке лежат 10 красных, 2 синих и 1 белый шар. Из коробки наугад вынимают два шара. Какие из следующих событий являются достоверными, какие невозможными, какие случайными:

1) A — «вынули два красных шара»;

2) B — «вынули два синих шара»;

3) C — «вынули два белых шара»;
4) D — «вынули шары разных цветов»;
5) F — «вынули два шара»;
6) G — «вынули два кубика».

5. Укажите, какие из описанных пар событий являются совместными, а какие несовместными.

1. Из набора домино вынута одна костяшка, на ней:
а) «одно число больше 3», «другое число 5»;
б) «одно число не меньше 6», «другое не больше 6»;
в) «одно число 2», «сумма обоих чисел равна 9»;
г) «оба числа больше 3», «сумма чисел равна 7».

2. Из полной колоды карт вынимается одна карта: а) «вынута карта красной масти» и «вынут валет»; б) «вынут король» и «вынут туз».

6. Сформулируйте события, противоположные данным:
1) A — «все учащиеся класса занимаются спортом»;
2) C — «из двух задач, предложенных на контрольной работе по математике, я решу хотя бы одну»;
3) D — «среди пяти человек нет ни одного блондина»;
4) E — «среди четырёх карт все карты разной масти»;
5) G — «при бросании монеты выпала решка»;
6) B — «при бросании игральной кости выпало 6 очков».

7. Равновозможные или неравновозможные события:
а) «вынута карта чёрной масти» и «вынута карта красной масти»;
б) «вынут король» и «вынута дама»;
в) «вынута карта пиковой масти» и «вынут валет»;
г) «вынута карта пиковой масти» и «вынута карта червовой масти».

8. В коробке лежат 20 белых шаров, 2 чёрных и 1 красный. Из неё наугад вынимается один шар. Какое из следующих событий является более вероятным:
а) A — «вынули чёрный шар»;
б) B — «вынули красный шар».

9. Образуют ли полную группу следующие события:
1) A_1 — «появление герба» и A_2 — «появление решки при бросании одной монеты»;

2) B_1 — «появление двух гербов при бросании двух монет» и B_2 — «появление двух решек при бросании двух монет»;

3) C_1 — «два попадания при двух выстрелах», C_2 — «одно попадание при двух выстрелах» и C_3 — «ни одного попадания при двух выстрелах»?

Ещё одним элементом, способствующим формированию представлений о понятии «событие», является классификация событий по степени их «объективной возможности реализации». Изучение классификации событий по этому признаку имеет для учеников важное мировоззренческое значение. Оказывается, что в окружающем мире не существует иных событий, кроме достоверных, невозможных и случайных. Здесь же подчёркивается фундаментальный характер понятия «случайного» события в построении и изучении закономерностей вероятностных моделей окружающего мира. Примеры таких моделей естественным образом привлекаются из школьных дисциплин (физики, химии, географии, биологии, истории, обществоведения, экономики). При этом имеет место реализация межпредметных связей.

Значение классификации по указанному выше признаку определяется ещё и тем, что на её основе осуществляется фактически первый подход к формированию понятия «вероятность». Если попытаться сопоставить с возможностью или невозможностью наступления конкретного события некоторую численную меру, в частности каждому достоверному событию поставить в соответствие число 1, а каждому невозможному — число 0, тогда понятно, что каждому случайному событию будет соответствовать действительное число из интервала [0; 1]. При этом имеет смысл вводить и изучать основные понятия в историческом контексте, так как при этом не нарушается и логика развёртывания теории вероятностей.

1.2. ОПЕРАЦИИ НАД СОБЫТИЯМИ

Логически обоснованным является переход к изучению вопроса об операциях над событиями. Предварительно надо рассмотреть понятие «отношения между событиями» — имеется в виду отношение включения ($A \subseteq B$), синонимичное с наиболее часто употребляемыми оборотами речи «событие А влечёт за собой событие В», «событие В является следствием события А», «событие А является частью события В». На основе этого отношения логично ввести определение равных событий (события А и В называются равными, если $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$).

В курсе теории вероятностей изучаются следующие операции над событиями: сложение (объединение) и умножение (пересечение). Разность событий можно ввести через соответствующее определение или на основе введённых операций. Подчёркивая, что события — это множества, можно изучать операции над событиями аналогично изучению операций над множествами, используя примеры, построенные на базе основных вероятностных моделей. Наличие у учащихся теоретико-множественных представлений позволит им проследить полную аналогию между операциями над множествами и операциями над событиями. При этом события представляются подмножествами некоторого множества Ω. Сумме событий А + В соответствует объединение $A \cup B$ этих подмножеств, а произведению $A \cdot B$ — пересечение $A \cap B$. Достоверное событие представляется объемлющим множеством Ω, а невозможное событие — пустым подмножеством ∅ в нём. Несовместность событий А и В означает, что соответствующие подмножества А и В не пересекаются: $A \cap B = \varnothing$. Событие $\bar{A}$, противоположное событию А, является дополнением к событию А во множестве Ω: $A + \bar{A} = \Omega$. Утверждения относительно свойств операций над событиями, сформулированные в алгебре событий, полностью аналогичны утверждениям алгебры множеств. Это обстоятельство позволяет применить метод аналогий в обучении (приложение 1). Изучение операций над событиями желательно сопровождать примерами, которые достаточно наглядно отражают не только сущность самой изучаемой операции, но и различие в этих операциях. Как правило, ученики достаточно легко по определению построят и сумму, и произведение событий.

Событие А **влечёт событие** В, если при каждом появлении А обязательно появляется В — этот факт обозначается $A \subseteq B$. В терминах элементарных событий это означает, что каждое элементарное событие, входящее в A, входит и в B. Например, производится выбор одного из чисел от 1 до 100: событие B — «выбор чётного числа», событие A — «выбор числа, кратного 10», тогда $A \subseteq B$, так как каждое число, кратное 10, является чётным.

Равенство событий $A = B$ означает, что $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$, то есть они состоят из одних и тех же элементарных событий. Например, производится выбор одного из чисел от 1 до 100: событие B — «выбор числа, кратного 3», событие A — «выбор числа, сумма цифр которого делится на 3», тогда A = B по признаку делимости на 3.

Суммой (объединением) событий A и B называется событие C = A + B, которое означает либо появление события A, либо появление события B, либо появление событий A и B вместе. Обобщим на случай событий больше двух: суммой (объединением) событий A_k называется событие A, которое означает появление хотя бы одного из событий A_k. Например, в опыте с кубиком: если событие A — «выпадение двойки», событие B — «выпадение четвёрки», событие C — «выпадение шестёрки», то D = A + B + C — событие, состоящее в том, что выпадет чётное число очков.

Произведением (пересечением) событий A и B называется событие $C = A \cdot B$, состоящее в совместном наступлении этих событий. Обобщим на случай событий больше двух: пересечением или произведением событий A_k называется событие A, которое заключается в осуществлении всех событий A_k. Например, в опыте с кубиком событие — «выпало 5» — событие, являющееся пересечением событий «выпало нечётное число» и «выпало число, большее 3».

Разностью событий A и B называется событие C, которое означает, что происходит событие A, но не происходит событие B: $C = A \setminus B$. Например, при бросании кубика событие A — «выпадение чётного числа очков», $A = \{2, 4, 6\}$, событие B — «выпадение не менее трёх очков», $B = \{3, 4, 5, 6\}$, тогда $C = A - B = \{2\}$.

Дополнительным к событию A называется событие $\bar{A}$, означающее, что событие A **не происходит**. Причём $A + \bar{A} = \Omega$ и $A \cdot \bar{A} = \varnothing$. Например, при бросании кубика событие A — «выпадение чётного числа очков», а событие $\bar{A}$ — «выпадение нечётного числа очков».

Для случайных событий имеют место следующие законы:

1. Коммутативный (переместительный):

$$A + B = B + A, \qquad AB = BA;$$

2. Ассоциативный (сочетательный):

$$A + (B + C) = (A + B) + C, \qquad A(BC) = (AB)C;$$

3. Дистрибутивный (распределительный):

$$A(B + C) = AB + AC;$$

4. Тождества: $A + A = A$, $AA = A$.

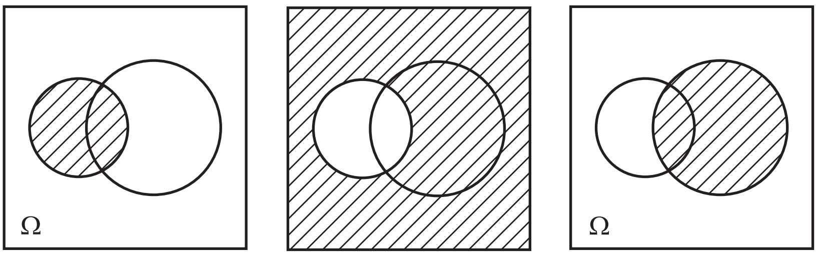
При изучении отношений и операций над событиями естественно использование наглядно-графических средств, которыми являются диаграммы Эйлера—Венна.

ИСТОРИЧЕСКАЯ СПРАВКА

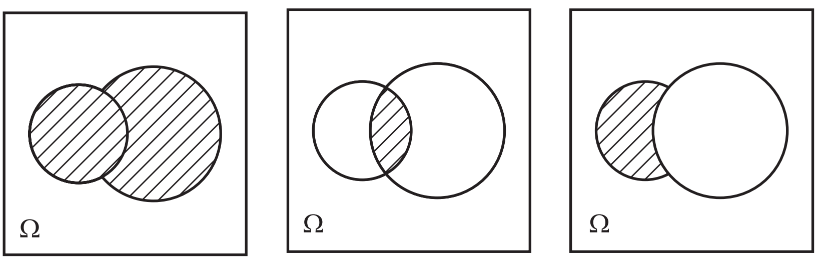
Леонард Эйлер (1707—1783) — российский и швейцарский математик, внёсший значительный вклад в развитие теории вероятностей и других разделов математики. Л. Эйлер — автор более чем 800 работ. Полжизни он провёл в России, где внёс существенный вклад в становление российской науки. Особенного расцвета графические методы достигли в сочинениях английского логика Джона Венна (1843—1923), подробно изложившего их в книге «Символическая логика», изданной в Лондоне в 1881 г. Поэтому такие схемы иногда называют диаграммами Эйлера—Венна. На диаграмме Эйлера—Венна сумму событий можно изобразить в виде фигур на плоскости. Каждое событие изображается некоторой фигурой, пересечение событий — общей частью этих фигур, объединение событий — объединением фигур. Диаграммы Эйлера—Венна позволяют наглядно показать связь между различными событиями. Несовместные события изображаются фигурами, не имеющими общих точек. Диаграммы Эйлера—Венна используются в математике, логике, менеджменте и других прикладных направлениях. Диаграммы Эйлера—Венна нашли применение в современной логико-математической теории «формальных нейронных сетей».

События и действия над ними можно наглядно проиллюстрировать с помощью диаграмм Эйлера—Венна: достоверное событие Ω изображается прямоугольником, элементарные случайные события — точками прямоугольника, случайные события — областью внутри него.

ДИАГРАММЫ ЭЙЛЕРА—ВЕННА



A $\qquad$ $\bar{A}$ $\qquad$ B



A + B $\qquad$ AB $\qquad$ A – B

Кроме этого, изучение операций над событиями актуально для случаев, когда вероятностное пространство имеет достаточно большое число элементов и решение задач с его использованием приводит к громоздким вычислениям. Эти положения можно считать основой мотивации изучения операций над событиями. Труднее сформировать понимание сущности операций над событиями. Например, после введения определений операций суммы и произведения событий и рассмотрения соответствующих примеров можно предложить ученикам следующие задания.

Пример 2. Пусть A, B и C — три произвольных события. Выразите через A, B и C и их отрицания следующие события: 1) произошло только событие C; 2) произошли все три события; 3) произошло одно из этих событий; 4) произошло хотя бы два из этих событий; 5) произошло, по крайней мере, два события; 6) произошло только два события; 7) ни одно из событий не произошло; 8) произошло не более двух событий.

Решение.

1) $C \cdot \bar{A} \cdot \bar{B}$;

2) $A \cdot B \cdot C$;

3) $A + B + C$;

4) $A \cdot B + A \cdot C + B \cdot C = A \cdot B \cdot \bar{C} + A \cdot \bar{B} \cdot C + \bar{A} \cdot B \cdot C + A \cdot B \cdot C$;

5) (то же, что и 4);

6) $A \cdot B \cdot \bar{C} + A \cdot \bar{B} \cdot C + \bar{A} \cdot B \cdot C$;

7) $\bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C}$;

8) $A + B + C - A \cdot B \cdot C = A \cdot B \cdot \bar{C} + A \cdot \bar{B} \cdot C + \bar{A} \cdot B \cdot C + A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot C + \bar{A} \cdot B \cdot \bar{C}$.

Пример 3. Два стрелка стреляют по мишени. Событие A_1 — «попадание в цель первым стрелком», событие A_2 — «попадание в цель вторым стрелком». Выразите A, B, C, D через A_1 и A_2, где событие A — «попал один стрелок», событие B — «попал второй стрелок», событие C — «хотя бы одно попадание в цель», D — «цель поражена».

Решение. Событие A — «попал один стрелок» означает, что попал либо первый, а второй промахнулся, либо попал в цель второй, а первый промахнулся. Поэтому $A = A_1 \cdot \bar{A}_2 + \bar{A}_1 \cdot A_2$.

Событие B — «попал второй стрелок», предполагает, что первый стрелок промахнулся: $B = \bar{A}_1 \cdot A_2$.

Хотя бы одно попадание означает, что цель поражена: попадание при первом и промах при втором выстреле; промах при первом и попадание при втором выстреле; попадание и при первом, и при втором выстрелах. Тогда $C = A_1 \cdot \bar{A}_2 + \bar{A}_1 \cdot A_2 + A_1 \cdot A_2$. Заметим, что событие $\bar{C}$ есть промах при двух выстрелах, то есть $\bar{C} = \bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2$. Отсюда следует, что если C — «попал хотя бы один стрелок», то $\bar{C}$ — «не попал ни один стрелок». Событие D — «цель поражена» означает хотя бы одно попадание в цель, то есть C = D.

Пример 4. Событие A — хотя бы одно из имеющихся четырёх изделий бракованное, событие B — бракованных изделий среди них не менее двух. Что означают противоположные события $\bar{A}$ и $\bar{B}$?

Р е ш е н и е. Событие $\bar{A}$ — «ни одно из имеющихся четырёх изделий не является бракованным», то есть все четыре доброкачественные. Событие $\bar{B}$ — «из четырёх изделий менее двух бракованных», то есть бракованных изделий — одно или ни одного.

Изучение темы «Операции над событиями» должно привести обучающихся к более глубокому осмыслению таких понятий, как «пространство элементарных событий», «несовместные события», «достоверные события», «невозможные события», «противоположные события». Методической проблемой можно считать обучение процедуре выделения простых событий. Разрешение этой проблемы приходит в результате накопления опыта решения задач. Отбор системы задач по этой теме желательно осуществить так, чтобы позже использовать их для решения задач по вычислению вероятности сложного события по известным вероятностям простых событий.

Упражнения

10. В чём состоит событие $C = A + B$, если A — «появление 6 очков при бросании игральной кости»; B — «появление 4 очков при бросании игральной кости»?

11. Событие A — «хотя бы одно из имеющихся четырёх изделий бракованное», событие B — «бракованных изделий среди них не менее двух». Что означают противоположные события $\bar{A}$ и $\bar{B}$?

12. Образуют ли полную группу следующие события:

1) A_1 — «появление герба»; A_2 — «появление решки при бросании одной монеты»;

2) B_1 — «появление двух гербов при бросании двух монет»; B_2 — «появление двух решек при бросании двух монет»;

3) C_1 — «два попадания при двух выстрелах»; C_2 — «одно попадание при двух выстрелах»; C_3 — «ни одного попадания при двух выстрелах»?

13. Из корзины, содержащей красные, жёлтые и белые розы, выбирается один цветок. Пусть событие A — «выбрана красная роза», событие B — «выбрана жёлтая роза», событие C — «выбрана белая роза». Что означает:

а) $\bar{A}$; б) $A + B$; в) $A \cdot C$; г) $\bar{A} + \bar{B}$; д) $AB + C$?

14. Два стрелка стреляют по мишени. Пусть событие A — «первый стрелок попал в мишень», событие B — «второй стрелок попал в мишень». Что означает:

а) $A + B$; б) $A \cdot B$; в) $A \cdot \overline{B}$?

15. Три стрелка сделали по одному выстрелу в мишень. События A_1, A_2, A_3 — попадание в мишень первым, вторым и третьим стрелками соответственно. Запишите события: 1) в мишень попал только один стрелок; 2) в мишень попал только второй стрелок; 3) хотя бы один стрелок попал в мишень; 4) все стрелки попали в мишень; 5) ни один стрелок не попал в мишень. Какие из записанных событий являются противоположными? Какие из событий образуют полную группу событий?

16. Три ученика решают задачу независимо друг от друга. Пусть событие A_1 — «первый ученик решил задачу», событие A_2 — «второй ученик решил задачу», событие A_3 — «третий ученик решил задачу». Выразите через A_i следующие события: 1) событие A — «все решили задачу»; 2) событие B — «задачу решил только первый ученик»; 3) событие C — «задачу решил только один ученик»; 4) событие D — «задачу решил хотя бы один ученик»; 5) событие F — «задача решена».

Следует отметить, что уверенное владение учащимися навыками по работе с операциями над событиями и умение использовать основные свойства этих операций важны для развития навыков решения задач по курсу теории вероятностей. Одна из важнейших проблем, рассматриваемая в теории вероятностей, — определение вероятности сложных событий, получаемых из простых с использованием операций над событиями.

ОГЛАВЛЕНИЕ