

А. В. Фарков

ОЛИМПИАДНЫЕ ЗАДАЧИ ПО МАТЕМАТИКЕ

10–11 КЛАССЫ

ПОДГОТОВКА, РАЗБОР, ПРАКТИКА

Москва
ИЛЕКСА
2026

УДК 372.853:374.1:51
ББК 22.1:74.20275я721
Ф24

Фарков А. В.

Ф24 Олимпиадные задачи по математике. 10–11 классы. Подготовка, разбор, практика. — М.: ИЛЕКСА, 2026. — 270 с.
ISBN 978-5-89237-757-7

Пособие содержит рекомендации по проведению Всероссийских математических олимпиад (первый и второй этапы) применительно к 10–11 классам, подборки задач для подготовки к этим олимпиадам, примерные тексты школьных и муниципальных олимпиад.

Пособие является необходимым дополнением к школьным учебникам по математике для 10–11 классов, рекомендованным Министерством просвещения Российской Федерации и включённым в Федеральный перечень учебников.

Данное пособие соответствует Федеральному государственному образовательному стандарту последнего поколения.

Издание в первую очередь адресовано учащимся 10–11 классов, но будет полезно также учителям математики общеобразовательных учреждений и руководителям математических кружков внешкольных образовательных учреждений. Его эффективно могут применять руководители общеобразовательных учреждений, студенты педагогических вузов, репетиторы и родители учащихся, занимающиеся со своими детьми.

УДК 372.853:374.1:51
ББК 22.1:74.20275я721

Учебное издание

Фарков Александр Викторович

Олимпиадные задачи по математике

10–11 классы

Подготовка, разбор, практика

Подписано в печать 21.01.2026.
Формат 60×88/16. Усл. печ. л. 16,5.

Тираж 1500 экз. Заказ

ООО «Илекса»

+7(964) 534-80-01

real-ilexa@yandex.ru

www.ilexa.ru

© Фарков А. В., 2026

© ИЛЕКСА, 2026

Все права защищены

ISBN 978-5-89237-757-7

ВВЕДЕНИЕ

Существующая в России концепция математического образования включает в себя как обязательный элемент проверки и оценки качества обучения проведение математических олимпиад и изучение их итогов. Это Всероссийские олимпиады школьников, проходящие в четыре этапа; школьный, муниципальный, региональный и заключительный; устные и командные олимпиады, олимпиады для будущих студентов, заочные, конкурс-игра «Кенгуру» и т. д. Но самой массовой олимпиадой является Всероссийская математическая олимпиада. При этом учащиеся 10–11 классов могут принять участие во всех её этапах.

В данном пособии рассматривается методика подготовки и проведения школьного и муниципального этапов Всероссийской олимпиады по математике, приводятся требования к подбору заданий, включаемых в тексты школьных и муниципальных олимпиад по математике применительно к учащимся 10–11 классов; описывается методика оценки олимпиадных заданий, также рассматриваются основные методы решения олимпиадных задач с примерами; задачи для подготовки учащихся к участию в различных олимпиадах, а также примерные тексты школьных и муниципальных олимпиад. При этом большинство текстов школьных и муниципальных олимпиад составлены автором или переработаны им с учётом рекомендаций Центральной предметно-методической комиссии по математике из текстов, по которым проводились олимпиады в различных регионах России.

Книга является логическим продолжением книг: «Математические олимпиады. 5–6 классы» и «Математические олимпиады. 7–9 классы», вышедших ранее в издательстве «Экзамен». Так как читатели, возможно, не знакомы с данными книгами, то ряд материалов по методике, некоторые задачи дублируются в данном пособии. Также в данное пособие включены материалы из книги «Методы решения олимпиадных задач. 10–11 классы», выходящей до последнего времени в издательстве «ИЛЕКСА».

Издание в первую очередь адресовано учащимся 10–11 классов, но будет полезно также учителям математики общеобразовательных учреждений и руководителям матема-

тических кружков внешкольных образовательных учреждений. Его эффективно могут применять руководители общеобразовательных учреждений, студенты педагогических вузов, репетиторы и родители учащихся, занимающиеся со своими детьми.

В пособии частично использованы материалы и из других книг автора, указанных в списке литературы.

Все замечания по улучшению данного пособия можно высылать в издательство и лично автору по электронному адресу: a.farkov@mail.ru.

МЕТОДИКА ПРОВЕДЕНИЯ ШКОЛЬНЫХ И МУНИЦИПАЛЬНЫХ ОЛИМПИАД ДЛЯ УЧАЩИХСЯ 10–11 КЛАССОВ

Под олимпиадой понимается соревнование учащихся на лучшее выполнение определённых заданий в какой-либо области знаний, в частности в математике.

Всероссийская олимпиада по математике проводится в четыре этапа: школьный, муниципальный, региональный и заключительный.

В данном пособии автор рассматривает методику проведения и подготовки учащихся 10–11 классов к школьному и муниципальному этапу.

Школьный этап Всероссийской олимпиады по математике, как правило, проводится отдельно для каждой параллели классов, начиная с четвёртого класса. Но в олимпиаде могут принимать участие и учащиеся более младших классов. Проводится школьный этап не позднее 1 ноября.

Основными целями школьной олимпиады являются:

- развитие интереса у обучающихся к математике;
- формирование мотивации к систематическим занятиям математикой на кружках, факультативах и элективных курсах;
- повышение качества математического образования;
- отбор наиболее талантливых учащихся для участия их в муниципальном этапе олимпиады и для организации индивидуальной работы с ними.

Школьный этап Всероссийской олимпиады по математике организует образовательная организация. Для этого в школе создаётся оргкомитет и жюри школьного этапа олимпиады.

Жюри создаётся для проверки и оценки работ участников олимпиады. Также жюри школьного этапа олимпиады определяет кандидатуры победителей и призёров олимпиады, предлагает участников для участия в муниципальном этапе олимпиады. В состав жюри входят председатель, заместитель и члены жюри. Председателем жюри чаще всего является руководитель школьного методического объединения учителей математики (заведующий кафедрой). Членами жюри могут быть учителя математики и преподаватели вузов, работающие в данной школе; старшеклассники и студенты педвузов, проходящие педпрактику в школе.

Состав оргкомитета, жюри, порядок проведения олимпиад в школе утверждается директором школы.

Наиболее ответственным моментом подготовки олимпиады является составление текста олимпиады.

В соответствии с Положением о Всероссийской олимпиаде школьников, тексты олимпиад для проведения школьного этапа разрабатываются предметными методическими комиссиями муниципального этапа олимпиады с учётом рекомендаций Центральной методической комиссии по математике. Но в последние годы тексты школьных олимпиад часто составляют специалисты федеральной территории «Сириус». При этом сама олимпиада проводится в кабинетах, оснащённых компьютерами.

Рассмотрим основные требования к тексту школьной олимпиады по математике для учащихся 10–11 классов, разработанные автором на основе изучения литературы по проблеме олимпиадного движения и собственного опыта проведения олимпиад, а также с учётом рекомендаций центральной методической комиссии по математике:

1. Число задач в тексте олимпиадной работы должно быть от 4 до 6 (при 1–3 заданиях могут возникнуть проблемы с определением победителей и призёров олимпиады, настроиться на решение больше 6 заданий учащимся сложно).

2. Все задачи в тексте работы должны располагаться в порядке возрастания трудности (или сложности).

Хотя данные понятия довольно часто встречаются в методической литературе в последние годы, все же остановимся на них подробнее.

Сложность — это объективная характеристика задачи, определяемая её структурой. Сложность задачи зависит от:

- объёма информации (количества понятий, суждений), необходимого для её решения;
- числа данных в задаче;
- числа связей между ними;
- количества возможных выводов из условия задачи;
- количества непосредственных выводов, необходимых для решения задачи;
- количества взаимопроникновений при решении задачи;
- длины рассуждений при решении задачи;

- общего числа шагов решения, привлечённых аргументов и т. д.

Рассчитать сложность задачи не очень просто, чаще всего учителя интуитивно распределяют задачи по сложности. Но в тексте олимпиадной работы задания берутся из разных разделов, некоторые из них нестандартные. Поэтому лучше применять всё же понятие «трудность задания».

Трудность — субъективная характеристика задачи, определяемая взаимоотношениями между задачей и решающим её учеником.

Трудность задачи зависит от:

- сложности задачи (сложная задача, как правило, является более трудной для учащихся);
- времени, прошедшего после изучения материала, который встречается в тексте задачи (задачи на материал, изученный 1–2 года назад, используемые факты, которые уже забылись, более трудны для учащихся);
- практики в решении подобного рода задач;
- уровня развития ученика (задача, трудная для среднего ученика общеобразовательного класса, может быть лёгкой для обычного ученика физико-математического класса);
- возраста учащегося (задача, трудная для семиклассника, может быть лёгкой для десятиклассника) и т. д.

Трудность определяется процентом учеников, решивших задачу из числа её решавших. Существуют различные формулы для расчёта трудности задачи.

3. В числе первых задач должны быть 1–2 задачи, доступные большинству учащихся, то есть с ними должны справиться не менее 70% учащихся. Это могут быть обычные задачи продвинутого уровня, аналогичные задачам из контрольных работ, а также и не изучаемые в школе, но которые должны решить большинство участников. Это необходимо, так как в школьной олимпиаде участвуют все желающие. А участник, не решивший ни одной задачи, теряет уверенность в своих силах, а иногда и интерес к математике. Поэтому и должны быть 1–2 доступные почти всем задачи. Но и эти задачи могут содержать «изюминку», благодаря которой более сильный ученик решил бы её быстрее и рациональнее.

4. В середине текста олимпиады должно быть 2–3 задачи повышенной трудности. Это могут быть задачи продвинутого уровня из контрольных работ, но с изменёнными условиями. Их должны решить примерно от 20 до 50% участников олимпиады. (Ученик, решивший более третьей части всех задач, уже может получить поощрение.)

5. Последними в тексте олимпиады должны быть 1–2 задания более трудных, их должны решить единицы учащих-ся. Это задания уровня муниципальных олимпиад.

6. Включаемые задания должны быть из разных разделов школьного курса математики, но, как правило, на материал, изученный в данном учебном году и во втором полугодии предыдущего года.

7. В числе заданий текста олимпиады могут быть задачи прикладного характера, задачи, аналогичные тем, что предлагаются на едином государственном экзамене по математике.

8. Для заинтересованности учащихся в посещении элективов и спецкурсов желательно включать задания, аналогичные рассмотренным там. Это могут быть логические задачи, задачи на применение принципа Дирихле, инвариантов, графов, задачи на раскраски, задачи в целых числах и т.п. Такого рода задачи часто называют специальным термином «олимпиадные», хотя, конечно, не только они должны быть в тексте школьной олимпиады.

9. В качестве одной из задач может быть задача, в условии которой фигурирует год проведения олимпиады.

10. В числе задач не должно быть задач с длительными выкладками, задач на использование трудно запоминающихся формул, на использование справочных таблиц.

11. Желательно включать в тексты олимпиад задачи из разных источников с целью уменьшения риска знакомства одного или нескольких участников со всеми задачами, включёнными в вариант. Лучше включать всё же новые задачи.

12. В текстах олимпиад для разных классов могут быть и одинаковые задания.

Иногда Центральная предметно-методическая комиссия по математике указывает иногда даже типы заданий, которые должны включаться в текст школьной олимпиады по математике. В частности, в текст школьного этапа Олимпиады

в 10 классе в 2011/2012 учебном году рекомендовалось включать следующие типы задач:

- нахождение числового множества, обладающего заданными свойствами;
- прогрессии;
- площадь, подобие фигур;
- система уравнений;
- логическая (комбинаторная) задача.

Соответственно, в 11 классе:

- рациональные и иррациональные числа;
- тригонометрическое уравнение;
- окружность, центральные и вписанные углы;
- многоугольники;
- комбинаторика.

В 2020/2021 учебном году в варианты заданий для учащихся 10–11 классов рекомендовалось включать задачи на свойства линейной и квадратичной функций, задачи по теории чисел, неравенства, задачи, использующие тригонометрию, стереометрию, математический анализ, комбинаторику.

А в 2024/2025 учебном году список задач стал единым для всех классов с 4 по 11:

- задачи на доказательство;
- задачи на нахождение ответа с обоснованием;
- задачи на построение конструкций.

Таковы основные требования к составлению текста работы школьной олимпиады.

Школьный этап олимпиады проводится до 1 ноября в один день для всех учащихся 4–11 классов, как правило, вне уроков. Возможно проведение олимпиад на кружке, но для более объективной картины лучше бы проводить олимпиады с утра или после 3–4-го уроков, перенося остальные уроки на другие дни. Проведение школьной олимпиады в выходные дни нецелесообразно. В регионах, где олимпиады проводятся с помощью платформы «Сириус. Курсы», на школьный этап отводится два дня: в первый день олимпиады проводится для 4–6 классов, во второй день — для 7–11 классов.

В школьных олимпиадах имеют право принимать участие все желающие. В случае большого числа параллельных классов и, соответственно, огромного числа желающих, возможно проведение сначала классной, а затем школьной олимпиады.

Можно первый тур сделать и заочным. Тогда на школьную олимпиаду приглашаются только призёры классных олимпиад или учащиеся, набравшие определённое число баллов (если текст олимпиадной работы был единый). Но участники классной олимпиады также считаются участниками школьной олимпиады.

Продолжительность школьной олимпиады в 10–11 классах: два урока (90 минут).

В указанное время все участники олимпиады приходят в специально отведённые классы, рассаживаются по местам. Желательно каждому участнику предоставить отдельный стол. На столах заранее разложены бумага для выполнения работ (листы бумаги формата А4 — для чистовиков и отдельные листы — для черновики) и тексты олимпиады. Один из членов жюри знакомит участников с текстом олимпиады, правилами оценивания заданий олимпиад, временем выполнения работы, правилами оформления заданий. Задания участники могут быть выполнены в любом порядке. Черновик должен быть подписан и сдан.

После этого участники олимпиады приступают к решению заданий. Консультироваться с товарищами, поворачиваться, использовать какую-то литературу на олимпиаде запрещается. Также запрещается пользоваться электронными вычислительными средствами или средствами связи.

За несколько минут до окончания работы член жюри предупреждает участников об окончании времени выполнения работы, и учащиеся начинают сдавать работы, подписав их.

После необходимого перерыва (во время его участники олимпиады могут пообедать) ученики возвращаются в класс, где один из членов жюри проводит разбор заданий олимпиады. Нецелесообразно отодвигать время разбора на занятие кружка или урок.

После разбора заданий члены жюри по каждому классу приступают к проверке заданий и оценке решений. Желательно, чтобы в каждой параллели было не менее 3 членов.

Самым сложным и ответственным моментом в проведении математической олимпиады является оценка заданий. Наилучшим образом зарекомендовала себя на математических олимпиадах 7-балльная шкала.

При этом 7 баллов ставится за полное верное решение. 6 баллов — за верное решение с небольшими недочётами, в целом не влияющими на решение. 5 баллов ставится за верное в целом решение, но в решении есть ряд ошибок либо рассмотрены не все случаи. Но приведённое учеником решение может быть правильным после исправления небольших ошибок. 4 балла ставится, если ученик рассмотрел один из двух, более сложных, существенных случаев или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка. 2 или 3 балла ставится за решения задания, в котором доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи. В 1 балл можно оценить решение, в котором рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии самого решения или при ошибочном решении. И 0 баллов ставится за неверное решение, в котором нет никакого продвижения в решении задания или за отсутствие решения.

Особенно важно отметить, что любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снимать баллы за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведённого в методических разработках или от других решений, известных жюри. Важно отметить, что исправления в работе (зачеркивания ранее написанного текста) не являются основанием для снятия баллов.

В то же время любой сколь угодно длинный текст решения, не содержащий полезных продвижений, должен быть оценён в 0 баллов.

После того как жюри выполнило проверку результатов участников олимпиады и у них есть предварительные результаты, участники имеют право ознакомиться со своими работами. В случае несогласия с выставленными баллами они имеют право обжаловать результаты. В этом случае Председатель жюри школьной олимпиады назначает члена жюри для повторного рассмотрения работы. При этом оценка по данной работе может быть и пересмотрена.

После того, как жюри перепроверило работы всех участников, и особенно набравших наибольшее число баллов, определяются победители и призёры. Они должны быть независимо от того, сколько баллов набрали участники. Победители и призёры олимпиады определяются жюри в соответствии с итоговой таблицей. Важно отметить, что победителями олимпиады являются ВСЕ участники, набравшие наибольшие

баллы. При этом победители должны набрать не менее 50% от максимального числа баллов. Иногда победителей может и не быть (если текст олимпиады составлен не в соответствии с указанными выше требованиями). Но призёры должны быть обязательно. Поэтому жюри может определить в любом классе более чем одного победителя и по несколько призёров. При определении победителей и призёров необходимо знать, что расхождение в 1–2 балла между результатами участников не должны сказываться на том, что один из них будет победителем, а другой, набравший на 1 балл меньше, уже призёром.

Абсурдна ситуация, если I место не присуждается ни одному ученику школьной олимпиады. Отличием в подведении итогов и определении победителей и призёров от спортивных соревнований является то, что победителей и призёров в каждой параллели может быть несколько.

Итак, кто же является победителем школьной олимпиады? Очевидно, это ученик, набравший наибольшее число баллов. Но так как субъективизм членов жюри может проявиться все равно при оценке заданий, то можно установить специальные границы в процентах от максимального числа баллов. Наиболее подходящими являются:

I место присуждается всем участникам, набравшим больше 75% от максимального числа баллов за все задания олимпиады. (Если всё же при неудачном тексте олимпиады никто не набрал данного числа баллов, необходимо опустить число баллов до 70%, 50%. Олимпиада — это соревнование, а в любом соревновании бывают победители, они должны быть и здесь.) Если несколько учеников верно решили 5 (4) задачи из 5 предложенных, всем им следует присудить первое место.

II место присуждается участникам, набравшим от 50 до 75% от максимального числа баллов. Если несколько учеников верно решили 4 (3) задачи из 5 предложенных, всем им можно присудить второе место.

III место даётся набравшим от 33 до 50%, то есть решившим верно 2–3 задачи из 5 предложенных.

В соответствии с рекомендациями Центральной методической комиссии по математике количество победителей и призёров школьного этапа олимпиады не должно превышать 45% от общего числа участников олимпиады. Большое число победителей и призёров только повысит интерес учащихся

к участию в олимпиадах. На следующий год желающих, думаю, будет больше.

Список победителей и призёров утверждается оргкомитетом школьного этапа олимпиады. После определения победителей и призёров олимпиады по каждой параллели руководство школы совместно с оргкомитетом и жюри олимпиады проводит награждение. Согласно «Положению о Всероссийской олимпиаде школьников», победители всех этапов награждаются грамотами, дипломами и призами.

Провести награждение победителей и призёров олимпиады можно на математическом вечере или торжественной линейке. В качестве призов могут быть книги по математике, художественные, научно-популярные книги, денежные призы. Всё зависит от конкретных условий школы.

Муниципальные олимпиады являются вторым туром единой системы Всероссийских математических олимпиад.

Основными целями проведения муниципальных олимпиад являются:

- формирование и закрепление интереса математически способных учащихся к регулярным дополнительным занятиям математикой;
- повышение качества работы учителей математики в школах;
- развитие системы работы с одарёнными учащимися в регионе;
- отбор наиболее способных школьников в каждом муниципальном образовании;
- воспитание организованности, дисциплинированности, воли;
- привитие навыков к систематическим занятиям внеклассной и внешкольной работой;
- пробуждение желания учащихся самостоятельно приобретать знания и применять их на практике;
- сравнение качества работы с учащимися в различных общеобразовательных учреждениях;
- определение направлений работы с одарёнными учащимися в регионе;
- формирование регионального списка наиболее одарённых учащихся;

- отбор наиболее талантливых учащихся для участия в региональном туре.

Олимпиады также оказывают положительное влияние на общий уровень преподавания математики в школах, во многом позволяют выявить качество математических знаний, умений учащихся. Кроме того, в какой-то степени они ориентируют учителя на более высокий уровень преподавания. Но необходимо помнить, что вместе с этим муниципальные олимпиады не должны являться единственной и основной формой внешкольной работы по математике. Наряду с ними должны проводиться популярные в последнее время соревнования: математические бои между школами, математические КВН, математические регаты и т. п.

Муниципальный этап Всероссийской олимпиады проводится для учащихся 7–11 классов, но Центральная методическая комиссия по математике рекомендует проведение муниципального этапа олимпиады и для учащихся 6 класса. Но ученики 5–6 классов могут принимать участие и в муниципальном этапе для учащихся 7 (8) классов, если на школьном этапе они выполняли задания для этих классов и прошли в муниципальный этап. В муниципальных олимпиадах соревнуются участники школьного этапа олимпиады текущего года, набравшие необходимое для участия в муниципальном этапе олимпиады количество баллов, установленное организатором муниципального этапа олимпиады. Кроме того, участниками олимпиады являются обучающиеся, ставшие победителями и призёрами муниципального этапа олимпиады предыдущего года, при условии, что они продолжают обучение в общеобразовательных учебных заведениях. Вышесказанное означает *недопустимость ограничения числа участников олимпиады от одного образовательного учреждения*. Но, всё же, чтобы муниципальная олимпиада не превратилась в олимпиаду одного общеобразовательного элитного заведения (лицея, гимназии), необходимо участие в ней учащихся и других учебных заведений. Всё это прописывается в положении о муниципальном этапе олимпиады.

Муниципальный этап олимпиады проводится организатором данного этапа олимпиады — органами местного самоуправления муниципальных районов и городских округов в сфере образования ежегодно не позднее 25 декабря.

Конкретные даты проведения муниципального этапа олимпиады устанавливаются организатором регионального этапа олимпиады.

Для проведения муниципального этапа олимпиады организатором указанного этапа олимпиады создаются оргкомитет, предметно-методическая комиссия и жюри муниципального этапа олимпиады.

Иногда в некоторых городах и районах для оказания финансовой помощи в проведении олимпиад привлекаются и спонсоры. Было бы очень хорошо, если бы эти спонсоры в школьные годы добивались определённых результатов в олимпиадах, демонстрируя личный пример участникам.

В состав жюри входят ведущие учителя школ муниципального образования, методисты муниципальных и региональных органов управлений образования, преподаватели, студенты и аспиранты вузов региона, а также преподаватели из сферы дополнительного образования. Жюри оценивает выполненные олимпиадные задания; проводит анализ выполненных олимпиадных заданий; определяет победителей и призёров муниципального этапа олимпиады; рассматривает совместно с оргкомитетом олимпиады апелляции участников; представляет в оргкомитет олимпиады аналитические отчёты о результатах проведения олимпиады.

Будет ли олимпиада интересной, запоминающейся, будут ли реализованы её цели — всё это зависит от текста олимпиадной работы.

Тексты олимпиадных работ для муниципального этапа составляются членами региональной предметно-методической комиссии по математике в соответствии с рекомендациями Центральной методической комиссии по математике. Иногда Центральная предметно-методическая комиссия для каждого учебного года рекомендует типы задач, которые должны включаться в текст олимпиадной работы. Поскольку это только рекомендации, то отступления возможны как от тематики, так и от порядка следования заданий. В качестве примера рассмотрим типы заданий, которые рекомендовалось включать в текст муниципальной олимпиады по математике в 10–11 классах ранее. Например, в 2011/2012 учебном году были рекомендованы такие типы заданий:

10 класс

1. Свойства квадратичной функции.
2. Теория чисел (делимость, остатки, чётность).
3. Окружность. Центральные и вписанные углы.
4. Алгебра (неравенства, прогрессии).
5. Комбинаторика.

11 класс

1. Тригонометрия.
2. Многочлены (теорема Безу) или квадратичная функция (теорема Виета).
3. Теория чисел (делимость, остатки, чётность).
4. Стереометрия.
5. Комбинаторика.

А в 2021/2022 учебном году Центральная методическая комиссия рекомендовала включать для проведения муниципального этапа в 10–11 классах следующие типы задач: на свойства линейной и квадратичной функций, на теорию чисел, неравенства, тригонометрия, стереометрия, математический анализ и комбинаторика. Также были приведены и образцы наиболее трудных задач, которые можно включать в тексты олимпиад. Например, для 10 класса была предложена такая задача:

Числа x , y , z таковы, что $2x > y^2 + z^2$, $2y > x^2 + z^2$, $2z > y^2 + x^2$. Докажите, что $x y z < 1$.

А в 11 классе предлагалась такая задача:

В каждой из 320 коробок лежит либо 6, либо 11, либо 15 шаров. Причём все три типа коробок присутствуют. Верно ли, что гарантированно можно выбрать несколько коробок, в которых суммарно ровно 1001 шар?

Иногда даже предлагались примерные тексты муниципальных олимпиад. Например, в 2018/2019 учебном году предлагался такой текст олимпиады для учащихся 11 класса:

11.1. Найдите все значения параметра a , для которых найдётся такое число β , что числа $\sin\beta$ и $2\cos\beta$ являются различными корнями уравнения

$$x^2 + ax + 1 = 0.$$

11.2. По итогам волейбольного турнира, проведённого в один круг (то есть каждая команда сыграла с каждой одну игру), оказалось, что первые три команды выиграли у каждой из остальных команд, а сумма очков, набранных первыми тремя командами, на 3 больше, чем сумма очков, набранных остальными командами. Сколько всего команд участвовали в турнире, если известно, что их больше трёх? (За победу даётся 1 очко, за поражение – 0, ничьих в волейболе не бывает.)

11.3. Положительные числа x и y , меньшие $\frac{1}{2}$, удовлетворяют неравенству: $y^2 - x^2 > y - x$. Докажите, что они удовлетворяют и неравенству:

$$y^3 - x^3 < y - x.$$

11.4. В параллелепипеде отмечена одна вершина. Какое наибольшее количество остальных вершин может находиться на одном и том же расстоянии от отмеченной?

11.5. Вася придумал новый корабль для морского боя – «боевой бублик». Этот корабль состоит из всех клеток квадрата 3×3 , кроме его центральной клетки. На поле 10×8 разместили один боевой бублик. Какое минимальное число выстрелов нужно сделать, чтобы гарантированно его ранить?

Отметим, что, разумеется, этого варианта заданий в качестве текста муниципальной олимпиады использовать региональные комиссии не должны.

В тексты олимпиадной работы включаются, в основном, так называемые *олимпиадные задачи*. Требования к таким задачам очень высокие: они должны быть красивыми, интересными, формулировки их должны быть яркими и запоминающимися, а решение должно основываться на оригинальных идеях. Учащиеся в данных задачах должны познакомиться со спецификой олимпиадных задач: умением строить цепочки логических рассуждений, доказывать некоторые утверждения и т. п. Подробнее об олимпиадных задачах и методах их решения будет рассмотрено в следующем разделе.

Рассмотрим *основные требования* к текстам муниципальных олимпиад по математике для учащихся 10–11 классов.

1. Число заданий в тексте должно быть от 4 до 6.

2. Все задания в тексте олимпиады должны быть расположены по возможности в порядке возрастания трудности или сложности.

Суть данных понятий уже была рассмотрена.

3. Первые 1–2 задания должны быть доступны большинству участников олимпиады: их должны решить около 70% учащихся. В числе таких задач могут быть как и наиболее лёгкие «олимпиадные» задачи, так и задачи, аналогичные задачам продвинутого уровня школьных учебников, контрольных работ. Условия задач можно немного изменить. Желательно, чтоб такие задачи содержали «изюминку», заметив которую, сообразительный ученик решил бы её быстрее и красивее.

Пример. Сумма первых десяти членов арифметической прогрессии равна 140, а произведение второго и девятого членов этой прогрессии равно 147. Найдите прогрессию, если она является возрастающей.

Решение. Это обычная задача продвинутого уровня. Обычный ученик составит в соответствии с условием систему уравнений:

$$\begin{cases} S_{10} = 140; \\ a_2 \cdot a_9 = 147. \end{cases}$$

Выражая S_{10} , a_2 , a_9 через a_1 и d , получается система двух уравнений, решая которую находится $d = 2$ или $d = -2$. Учитывая, что прогрессия возрастающая, получим одно решение: $d = 2$. А далее находим $a_1 = 5$.

Более сообразительный ученик может заметить, что сумма второго и девятого членов прогрессии совпадает с суммой первого и десятого членов этой же прогрессии. А так как сумма их равна 28, а произведение 147, можно определить, что второй член равен 7, а девятый равен 21. Тогда легко находим:

$$d = 2 \text{ и } a_1 = 5.$$

Включение в текст работы посильной для большинства учащихся задачи вселяет в учащихся веру в свои силы, возбуждает энтузиазм, пробуждает желание лучше учиться по математике и добиваться дальнейших успехов на следующих олимпиадах.

4. Следующие 2–3 задачи должны быть более трудными, но хотя бы одну из них должны решить большинство участников — с ними должна справиться примерно половина участников. Это могут быть задачи, не рассматриваемые на уроках, но с идеями их решения ученики встречались во внеклассной работе, при самостоятельном знакомстве с различными пособиями.

Например:

1) Постройте график уравнения $\|x| + |y| - 3| = 2$.

2) Решите уравнение $x^4 - 7x^3 + 14x^2 - 7x + 1 = 0$.

3) На острове живут рыцари, которые говорят всегда правду, и лжецы, которые всегда лгут. Путешественник встретил двух туземцев А и Б. Туземец А сказал: «По крайней мере, один из нас (А или Б) — лжец». Можно ли по этой фразе точно определить, кем является А и кем является Б (лжецом или рыцарем)?

4) Какое число больше: $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 20$ или $1 + 2 + 3 + \dots + 1\,000\,000$? Свой ответ обоснуйте. Пользоваться калькулятором нельзя.

5. Последние 1–2 задачи могут содержать как материал, не изучаемый в школе, так и наиболее сложные школьные задачи. Такие задачи обычно решают единицы учащихся. Обычно, это задачи уровня регионального этапа олимпиад. Приведём примеры подобного рода задач:

1) В комнате собрались 8 человек. Некоторые из них лгут, а остальные — честные люди, всегда говорящие правду. Один из собравшихся сказал: «Здесь нет ни одного честного человека». Второй сказал: «Здесь не больше одного честного человека». Третий сказал: «Здесь не более двух честных людей» и т. д. до восьмого, который сказал: «Здесь не более семи честных людей». Сколько в комнате честных людей? Ответ обоснуйте.

2) Решите в натуральных числах уравнение: $19m + 98n = 1998$.

3) В каждую клетку квадратной таблицы 25×25 вписано произвольным образом одно из чисел 1 или -1 . Под каждым столбцом пишется произведение всех чисел, стоящих в этом столбце. Справа от каждой строки пишется произведение всех чисел, стоящих в этой строке. Докажите, что сум-

ма 50 написанных произведений не может оказаться равной нулю.

4) По кольцевой дороге одновременно из одной точки в одном направлении стартовали три велосипедиста. Первый из них проезжает всю трассу за 5 минут, второй — за 7 минут, а третий — за 9 минут. Через какое наименьшее время все велосипедисты вновь окажутся в одной точке трассы? Скорости всех велосипедистов постоянные.

5) Сколько существует четырёхзначных чисел, не делящихся на 1000, у которых первая и последняя цифры чётные?

6. В качестве предложенных задач должна быть задача, содержащая год проведения олимпиады.

Например:

1) Сравните числа: $\sqrt{2018} + \sqrt{2016}$ и $2\sqrt{2017}$?

2) Решите в натуральных числах уравнение $x^2 - y^2 = 2002$.

3) Можно ли разбить равносторонний треугольник на 2020 равносторонних треугольников (возможно, не всех равных между собой)? Если можно, то как? Если нет, то объясните, почему?

7. Включаемые задания должны носить творческий характер и проверять не степень усвоения участником олимпиады различных разделов школьной математики, а его способность к нахождению решений новых для него задач. Бóльшая часть заданий должна включать в себя элементы (научного) творчества.

8. Задачи в тексте олимпиады должны быть как из разных разделов школьного курса математики, так и чисто «олимпиадные» (использующие специальные методы решения); при их решении должны применяться различные приёмы, идеи.

При включении в текст задач, использующих программный материал, необходимо быть особенно осторожным. Ведь один и тот же материал может изучаться по различным учебникам не только в разное время учебного года, но и в разных классах. В федеральный перечень учебников математики, рекомендованных к использованию в общеобразовательных учреждениях для учащихся 10–11 классов для реализации обязательной части образовательной программы, включено несколько базовых учебников разных ав-

торов по алгебре, при этом перечень этот ежегодно меняется. Лишь по геометрии в настоящее время существует один учебник — Л. С. Атанасяна и др. Поэтому нельзя включать в текст олимпиадных заданий задачи по тем разделам математики, которые не изучены хотя бы по одному базовому учебнику математики. Большинство же задач лучше дать чисто «олимпиадных».

9. В текстах олимпиад для различных классов могут быть и одинаковые задачи.

10. Желательно включение в текст олимпиадных заданий таких задач, которые бы позволяли оценивать их решение разным числом баллов (к числу таких задач можно отнести логические задачи, задачи на поиск различных вариантов разрезания, геометрические и задачи другого вида).

Конечно, *могут быть и другие требования* (обновление типов задач каждый год, использование задач, подобранных из различных источников и т. д.)

Лучше, если составителями текстов являются одни и те же люди в регионе, им легче устранить ошибки, промахи, совершённые в прошлом году.

Проведение муниципального этапа олимпиады

Кроме оргкомитета, в проведении олимпиад принимает участие и жюри. Для каждой параллели классов создаётся своё жюри. Число членов жюри зависит от числа участников олимпиады, но его состав должен включать не менее 5 человек. Обязательное требование — председатель жюри не должен иметь среди участников своих учеников. Лучше всего на эту роль подходят преподаватели вузов, техникумов, колледжей, училищ. Всё это надо хорошо продумать оргкомитету олимпиады. Лучший вариант — в жюри включать лишь тех учителей, кто не имеет своих учеников среди участников олимпиады (ведь даже при шифровке работ учителя узнают работы своих учеников по почерку). Ясно, что состав жюри по классам определяется накануне или перед началом проведения олимпиады. А вот председателей жюри, как всей олимпиады, так и по параллелям классов, лучше определять заранее. Председателем жюри муниципального этапа олимпиады лучше назначать составителя текстов олимпиад или руководителя муниципального объединения учителей мате-

матики. Председателями же жюри классов следует назначать *руководителей школьных методических объединений или преподавателей вузов, техникумов, училищ.*

Продолжительность олимпиады в соответствии с рекомендациями Центральной методической комиссии по математике для учащихся 10–11 классов составляет 3 часа 55 минут (235 минут). Когда проводить олимпиаду — вопрос не такой простой. Хотя многие методисты рекомендуют проводить олимпиады в выходной день, думаем, вряд ли это целесообразно. В некоторых школах одни и те же учащиеся являются победителями школьных олимпиад по нескольким предметам, поэтому в случае их участия в нескольких районных олимпиадах эти учащиеся фактически лишаются выходного дня. Поэтому целесообразнее ряд олимпиад проводить в обычные дни (лучше со вторника по четверг), хотя каждый регион решает это для себя сам. Возможен вариант проведения олимпиады и в субботу, но это последний день после напряжённой недели, и если в пятницу участникам олимпиады не дать отдохнуть, вряд ли они покажут наилучший свой результат. А в итоге ученики пропускают два учебных дня при шестидневной рабочей неделе. Начинать олимпиады лучше с 9 (10) часов после торжественного открытия олимпиады. На торжественном открытии олимпиады учащихся поздравляют с участием в олимпиаде, знакомят с регламентом, правилами поведения. Особо надо подчеркнуть то, что олимпиада — это соревнование, а поэтому будут как победители, так и побеждённые. Сами соревнования проводятся в больших аудиториях, в которых представители школы, в которой проводится олимпиада, всё приготовили для проведения олимпиады: бумагу (листы формата А4, листы в клеточку), запасные ручки, карандаши. При хорошем финансировании олимпиады можно сформировать специальные папки на память для каждого участника. Участников олимпиады желательно рассадить по одному за столы, проследив, чтобы рядом не оказалось учеников из одной школы. На каждый стол необходимо положить бланк с заданиями, на котором для учащихся помещены краткая памятка, время выполнения заданий и условия задач. При проведении олимпиады в аудитории не нужно присутствовать всем членам жюри, достаточно двух человек, в том числе председателя жюри класса. Остальные члены

жюри в это время находятся в другой аудитории, где решают предложенные участникам олимпиады задания, находят другие варианты решения того или иного задания, обсуждают возможные варианты числа выставления баллов за решение заданий.

Перед началом олимпиады участники заполняют титульный лист, на котором, кроме данных об ученике, имеются и данные о педагогах-наставниках. Категорически запрещается делать какие-либо записи, указывающие на авторство работы, на других листах, сдаваемых учеником на проверку.

Решение заданий олимпиады участниками олимпиады выполняются ручками с синим или фиолетовым цветом на листах формата А4 (или А5). Запрещается использование для записи решений ручек с красными или зелёными цветами.

При проведении олимпиады запрещается подход к участнику олимпиады своего учителя. Поэтому лучше подходить к ученикам (если это необходимо) председателю жюри олимпиады по данной параллели. Выходить участникам олимпиады можно разрешить лишь один раз и то, лучше, в присутствии члена жюри. Время выхода и возвращения ученика в аудиторию фиксируется на титульном листе ученика.

Участникам олимпиады запрещается пользоваться справочной литературой, электронными вычислительными средствами или средствами связи.

После окончания олимпиады желательно сразу или после небольшого перерыва (учащиеся должны немного отдохнуть, восстановить силы, пообедать) провести разбор заданий олимпиады. Разбор проводит один из членов жюри в то время, пока работы участников олимпиады шифруются представителем оргкомитета.

Проверяют и оценивают решения заданий муниципальной олимпиады члены жюри.

Рассмотрим основные требования к проверке работ участников олимпиады:

1. Олимпиада не является контрольной работой и недопустимо снижение оценок по задачам за неаккуратно записанные решения, исправления в работе. В то же время обязательным является снижение оценок за математические, особенно логические ошибки.

2. Для объективности проведения олимпиады обязательной является шифровка работ, проводимая членами оргкомитета олимпиады.

После окончания олимпиады работы участников олимпиады отдельно по каждому классу передаются на шифровку (кодирование). На обложке каждой тетради (титульном листе) пишется соответствующий шифр (код), указывающий № класса и № работы (7–01, 7–02, ..., 7–01, 7–02, ...), который дублируется на первой (белой) странице работы. После этого обложка тетради снимается. Все страницы работы, содержащие указание на авторство этой работы, при шифровке (кодировании) изымаются и проверке не подлежат.

Дешифровка (декодирование) олимпиадных работ осуществляется после окончания проверки и составления предварительной итоговой таблицы и предварительного определения победителей и призёров олимпиады по соответствующему классу. После опубликования предварительных результатов проверки олимпиадных работ участники олимпиады имеют право ознакомиться со своими работами, в том числе сообщить о своём несогласии с выставленными баллами (подать апелляцию). В этом случае председатель жюри олимпиады назначает члена жюри для повторного рассмотрения работы. При этом оценка по работе может быть и изменена. Изменение оценки согласуется с председателем жюри и вносится в итоговую таблицу.

3. Решение каждой задачи оценивается жюри в соответствии с критериями и методикой оценки, разработанной Центральной предметно-методической комиссией: все задания муниципального этапа олимпиад, как и школьного, оцениваются по единым нормам, исходя из 7 баллов за каждое задание (было рассмотрено выше). Важно учитывать, что задание не может оцениваться дробным числом баллов: 0,8; 4,5 и т. п.

Начать проверку работ необходимо с выяснения принципиального вопроса: верно ли решена задача (тогда ставится 4–7 баллов) или неверно решена задача (тогда её решение оценивается от 0 до 3 баллов).

Решение считается *неполным* в следующих случаях:

- если оно содержит основные идеи, но не доведено до конца;

- если оно при верной общей схеме рассуждений содержит пробелы, то есть явно или скрыто опирается на недоказанные утверждения, которые нельзя считать известными или очевидными.

Решение будет *неполным*, если ученик нашёл не все способы, рассмотрел не все возможные варианты решения, но большинство из них.

Исправления, поправки в решениях не учитываются, но учитывается оригинальность решения. Вычислительные ошибки в невычислительных задачах не считаются за принципиальные ошибки. При оценке заданий учитываются только их правильность, полнота, обоснованность, идейность и оригинальность. За нерациональность решения, как правило, оценка за задание не уменьшается. Умение проявить догадку, сообразительность должно цениться выше, чем умение хорошо изложить решение. Ответ, найденный логическим путём, обычно оценивается выше, чем найденный подбором.

4. Членам жюри желательно смотреть и черновики. Причём недостатки, обнаруженные в черновых записях, не учитываются, но учитывается всё, что может улучшить чистовик. *Хотя Центральная методическая комиссия рекомендует черновики не проверять!*

5. Иногда составители текстов олимпиад, облегчая работу членам жюри, разрабатывают специальные методические рекомендации, где дают и дополнительные указания по оценке того или иного задания. В случае расхождения между общими и дополнительными указаниями применяют дополнительные указания. Но в случае противоречия между дополнительными указаниями и реально сложившейся ситуацией на олимпиаде жюри имеет право вносить изменения как в общие, так и в дополнительные указания по оценке решений заданий.

Рассмотрим конкретные примеры, как жюри может оценить задания олимпиады.

Пример 1. Решите уравнение: $x^4 - 7x^3 + 14x^2 - 7x + 1 = 0$.

Решение: Разделим обе части уравнения на x^2 ($x = 0$ не является корнем уравнения), тогда получим уравнение:

$$x^2 - 7x + 14 - \frac{7}{x} + \frac{1}{x^2} = 0, \text{ которое преобразуем к уравне-}$$

нию: $-7\left(x + \frac{1}{x}\right) + \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 14 = 0$. Введём новую переменную $y = x + \frac{1}{x}$, получим уравнение $y^2 - 7y + 12 = 0$, которое имеет корни $y_1 = 4$, $y_2 = 3$. Тогда $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3}$, $x_{3,4} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Если ученик при решении данного уравнения догадался, что необходимо разделить обе части уравнения на x^2 , но дальше продвинуться в решении не смог, то можно дать ему 1 балл. Если ученик догадался о введении новой переменной, ввёл её, а дальше продвинуться не смог, то можно оценить его решение уже 4 баллами. В 5 баллов можно оценить решение данного уравнения, если ученик остановился на решении уравнения $y^2 - 7y + 12 = 0$, а корни его обозначил по невнимательности за x_1, x_2 . Можно дать 6 баллов за решение, в котором допущена вычислительная ошибка в нахождении корней уравнения. Абсолютно правильное решение оценивается 7 баллами.

Пример 2. В каждую клетку квадратной таблицы 25×25 произвольным образом вписано одно из чисел: 1 или -1 . Под каждым столбцом пишется произведение всех чисел, стоящих в этом столбце. Справа от каждой строки пишется произведение всех чисел, стоящих в этой строке. Докажите, что сумма 50 написанных произведений не может оказаться равной нулю.

Решение: Перемножая все 50 произведений, мы получим 1, так как в каждое произведение любое из чисел войдёт 2 раза. Тогда в число 50 сомножителей будет входить чётное число произведений с « -1 », а поэтому сумма чётного числа произведений с « 1 » и чётного числа произведений с « -1 » не будет равна 0 (25 — число нечётное, значит, одинакового числа слагаемых не будет).

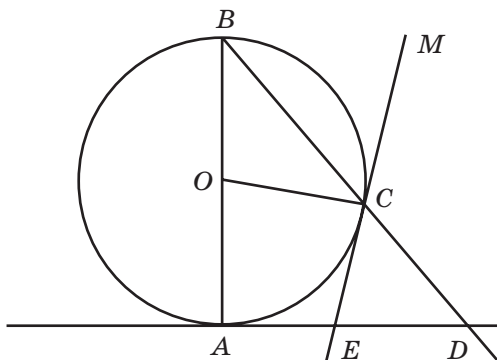
В 7 баллов оценивается решение, где есть все обоснования. За правильный ответ без какого-то обоснования предлагается ставить 0 баллов. Решение задачи, в котором есть

основная идея — надо перемножить все 50 произведений, — можно оценить 2 баллами. Если же ученик дополнительно использовал понятия «чётность» и «нечётность», но обосновать ответ полностью не смог, то такое решение можно оценить 4 баллами.

Замечание: данная задача относится к числу таких, решение которых трудно оценить другими баллами. Как показали итоги её решения, чаще всего ученики получали 0 или 7 баллов (что случалось крайне редко).

Пример 3. На окружности выбраны диаметрально противоположные точки A и B и отличная от них точка C . Касательная к окружности в точке A и прямая BC пересекаются в точке D . Докажите, что прямая, касающаяся окружности в точке C , делит пополам отрезок AD .

Решение:



Пусть MC пересекается с AD в точке E . Тогда $AE = CE$, как отрезки касательных, проведённых к окружности из одной точки. Выполним дополнительное построение: проведём AB и OC . Так как $OB = OC$, то $\angle OBC = \angle OCB$. Так как прямые OC и CE перпендикулярны, то $\angle ECD = \angle BCM = 90^\circ - \angle OCB = 90^\circ - \angle OBC$. Рассмотрим треугольник ABD : $\angle BDA = 90^\circ - \angle OBC$, значит, $\angle BDA = \angle ECD$, а значит, треугольник ECD — равнобедренный, поэтому $CE = DE$. Но так как $AE = CE$, то $AE = DE$.

Решение задачи оценивается 4 баллами, если ученик верно выполнил дополнительное построение, доказал равенство отрезков AE и DE , но не объяснил промежуточных обоснований (их здесь много), в 5 баллов — если доказал требуемое, но не объяснил 1–2 выводов. Если ученик обосновал равенство отрезков AE и CE (или углов OCB и OBC), то можно дать ему 1 балл, если же дополнительно доказал и равенство углов, которые указаны в решении, то можно уже такое решение оценить в 3 балла. В 7 баллов оценивается решение со всеми обоснованиями.

Пример 4. Сколькими нулями оканчивается произведение: $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 1999 \cdot 2000 \cdot 2001 \cdot 2003$?

Решение: Так как в произведении содержится $(400 + 80 + 16 + 3)$ пятёрок, то произведение оканчивается 499 нулями.

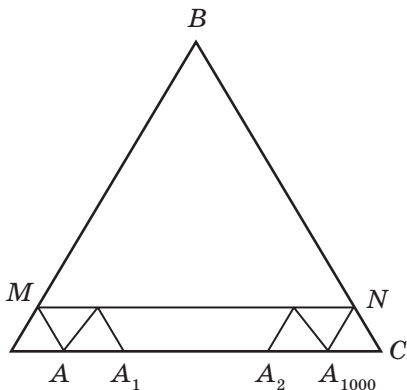
Верное решение со всеми обоснованиями оценивается в 7 баллов. Если ученик догадался, что число нулей зависит от числа пятёрок, но не смог дальше продвинуться, такое решение можно оценить 2 баллами. Решение, в котором подсчитано лишь число нулей, получающееся от перемножения чисел с нулями на конце, оценивается лишь 1 баллом. Других вариантов оценивания может и не быть.

Пример 5. Можно ли разбить равносторонний треугольник на 2002 равносторонних треугольника (возможно, не всех равных между собой)? Если можно, то как? Если нет, то объясните, почему?

Решение: а) Равносторонний треугольник на 2002 равносторонних треугольника разбить можно. План построения:

1. Отложить $AM = \frac{1}{1001}AB$.
2. Провести MN , параллельную AC .
3. На AC отложить 1001 отрезок, равный AM .
4. Из точек $A_1, A_2, \dots, A_{1000}$ провести прямые, параллельные прямой AB .

5. В полосе (см. рисунок) получается 2001 треугольник, они все равносторонние и равны между собой, а 2002-й треугольник — это $\triangle MBN$.



Неверный ответ или правильный ответ без рисунка и обоснований следует оценивать как 0 баллов. Если ученик дал правильный ответ и догадался, что 2001 треугольник будет в полосе, то можно дать за это решение 4 балла. Если все построения объяснены, есть чертёж, но не обосновано, почему получаются равные треугольники, то решение можно оценить 5 баллами. В случае правильного решения задачи со всеми обоснованиями ставится 7 баллов.

Конечно, предложенные варианты оценки заданий олимпиады являются примерными. Число баллов ставит жюри, им виднее. Главное, чтобы при проверке работ учащихся оценивалась деятельность учащихся, идеи (хотя и не доведённые до конца), а не только правильность и неправильность решений. Тогда и не будет в протоколах олимпиад только 0 и 7 баллов.

6. Каждая работа должна быть оценена двумя членами жюри. В случае расхождения их оценок вопрос об окончательном определении баллов, выставляемых за решение указанной задачи, определяется председателем жюри или назначенным им старшим по классу.

7. Результаты проверки всех работ участников олимпиады члены жюри заносят в итоговую таблицу — протокол олимпиады. Фамилии учащихся вписываются только после заполнения всех остальных столбиков.

Определение победителей и призёров олимпиады производится в соответствии с Положением о Всероссийской олимпиаде школьников (приказ Минобрнауки РФ от 27 ноября 2020 года № 678 с изменениями от 5 августа 2024 года). В соответствии с данным Положением, участники муниципального этапа олимпиады, набравшие наибольшее количество баллов, признаются победителями муниципального этапа олимпиады при условии, что количество набранных ими баллов превышает половину максимально возможных. При этом победителей может быть несколько.

В случае, когда победители не определены, то есть нет участников, набравших более половины максимального числа баллов, на муниципальном этапе олимпиады определяются только призёры.

Количество призёров муниципального этапа олимпиады определяется исходя из квоты победителей и призёров, установленной организатором регионального этапа олимпиады. Призёрами муниципального этапа олимпиады в пределах установленной квоты победителей и призёров признаются все участники муниципального этапа олимпиады, следующие в итоговой таблице за победителями.

В случае, когда у участника муниципального этапа олимпиады, определяемого в пределах установленной квоты в качестве призёра, оказывается такое же количество баллов, как и у следующих за ним в итоговой таблице, решение по данному участнику и всем участникам, имеющим с ним равное количество баллов, определяется жюри муниципального этапа олимпиады.

Список победителей и призёров муниципального этапа олимпиады утверждается организатором муниципального этапа олимпиады.

Победители и призёры муниципального этапа олимпиады награждаются дипломами. Также можно вручить призы, среди которых могут быть и книги по математике.

Также можно поощрить и учащихся, занявших 4–5 места.

Сколько всего может быть победителей и призёров муниципальной олимпиады? Так как квоты могут быть разные, то в различных случаях их может быть от 20 до 40%. Как определить победителей и призёров?

Рассмотрим конкретный *пример*.

Допустим, что среди 30 участников олимпиады результаты лучших участников будут: 28 б, 24 б, 23 б, 22 б, 19 б, 19 б, 16 б и т. д. (из 35 максимальных баллов). Квота победителей и призёров определена — не более 20% от числа участников. Тогда в соответствии с Положением об олимпиаде и тем, что *разница в 1–2 балла не является очень существенной* (всё же оценивают результаты люди), на первое место можно вывести ученика, набравшего 28 б. А на втором месте будут 3 ученика с 24 б, 23 б, 22 б; на третьем месте окажутся 2 ученика с 19 б. Всего получилось 6 победителей и призёров, то есть 20%.

Также жюри может установить и поощрительные места, призы. Например, за самое оригинальное решение какой-то задачи; единственному ученику, верно решившему такую-то задачу; самому молодому (ведь в олимпиадах могут принимать участие и учащиеся из более младших классов), самому опытному участнику и т. д.

Жюри может подвести и итоги официального или неофициального первенства между школами. Желательно, в тот же день провести награждение победителей, а участникам, пока жюри проверяет работы, предложить развлекательную программу. Желательно бы организовать и горячее питание или работу буфета. В качестве развлекательной программы может быть проведён как КВН, так и концерт, дискотека, экскурсия по городу и т. п. Всё хорошо к месту. Отсрочивать подведение итогов нежелательно: кроме лишней нервозности для учащихся, может быть и много неприятного для самих учителей. Начинаются выяснения: а почему у такого-то ученика столько-то баллов, а у такого-то столько. Необходимо знать, что никакие апелляции по олимпиадам, как правило, не принимаются после подписания протокола и принятия решения о призёрах и победителях. Победители и призёры олимпиады среди учащихся 10 класса на следующий год обязательно участвуют в муниципальной олимпиаде, даже если они и не стали призёрами школьной олимпиады. Само награждение лучше провести в одном из лучших помещений школы, где проводится олимпиада. На эту торжественную часть желательно пригласить спонсоров, выдающихся деятелей науки, работников различных организаций, которые были в школьные годы победителями муниципальных олим-

пиад. Желательно итоги муниципальных олимпиад осветить и в местной прессе. В практике подведения итогов олимпиад встречается и такой подход, когда победителей всех предметных олимпиад в городе приглашают на торжественное специальное мероприятие, где и происходит их чествование. Также иногда органы местного самоуправления и некоторые школы для победителей и призёров олимпиад устанавливают денежные премии, которые вручаются учащимся в конце года или полугодия.

ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ОЛИМПИАДНЫХ ЗАДАЧ

Задачи, решаемые на уроках и вне уроков математики, очень разнообразны.

Среди всех математических задач выделяется особый вид, получивший специальное название: *олимпиадные задачи по математике*.

Проведённый анализ литературы показывает, что единого подхода к трактовке «олимпиадной задачи» нет. В дальнейшем автор будет придерживаться следующего определения.

Под олимпиадной задачей по математике будем понимать задачу повышенной трудности, нестандартную по формулировке или методам их решения.

При таком подходе в число олимпиадных задач попадут как нестандартные задачи по математике, использующие необычные идеи и специальные методы решения, так и стандартные задачи, но допускающие более быстрое, оригинальное решение.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Вычислить: $90 + 89 + 88 + \dots + 1 + 0 - 1 - 2 - \dots - 91 - 92$.

Пример 2. Вычислить: $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots + 2021 - 2022$.

Обе приведённые задачи являются стандартными, но, если выполнять действия по порядку, не применяя законов сложения и вычитания, на это потребуется много времени. А время на олимпиадах очень ценно. Поэтому тот, кто найдёт более быстрое решение этих и подобных заданий, сэкономит время для решения других задач. В то же время не все типы нестандартных задач будут олимпиадными. Останутся многие нестандартные задачи, имеющие как длинные решения, так и не использующие специальных методов решения.

Классификацию олимпиадных задач построить трудно (есть такие задачи, которые трудно отнести к какому-то отдельному виду, — они могут и не иметь аналогов; к тому же с каждым годом благодаря работе методистов и математиков появляются всё новые олимпиадные задачи), поэтому будем рассматривать следующие *основные типы олимпиадных задач*.

1. ЗАДАЧИ НА ПРИМЕНЕНИЕ СПЕЦИАЛЬНЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ

1. Принцип Дирихле (немецкий математик Иоганн Петер Густав Лежён Дирихле жил в 1805–1859 гг).

Принцип Дирихле выражает соотношение между двумя множествами. Существует несколько формулировок данного принципа. Самой популярной является такая: «Если в n клетках сидят m зайцев, причём $m > n$, то хотя бы в одной клетке сидят, по крайней мере, два зайца».

Принцип Дирихле легко доказывается методом доказательства от противного. Допустим, что в каждой клетке будет находиться не более одного зайца. Тогда в n клетках будет находиться не более n зайцев, что противоречит условию.

Рассмотрим и другие формулировки принципа Дирихле:

«Пусть в n клетках сидят m зайцев, причём $n > m$. Тогда найдётся хотя бы одна пустая клетка» (доказывается аналогично, методом от противного).

«Если m зайцев сидят в n клетках, то найдётся клетка, в которой сидят не меньше, чем $\frac{m}{n}$ зайцев, и найдётся клетка, в которой сидят не больше, чем $\frac{m}{n}$ зайцев»;

«Если m зайцев съели n килограммов травы, то какой-то заяц съел не менее $\frac{m}{n}$ килограммов травы и какой-то заяц съел не больше $\frac{m}{n}$ килограммов (а если кто-то съел больше среднего, то кто-то съел меньше среднего)» (*непрерывный принцип*);

«Если в n клетках сидят m зайцев и $m \geq kn + 1$, то в какой-то из клеток сидят, по крайней мере, $k + 1$ зайца» (*обобщённый принцип*).

Приведём примеры задач, в решении которых применяются данные формулировки принципа Дирихле.

Задача 1.1. В школе 11 классов. В ближайшем к школе доме живут 14 учеников данной школы. Можно ли утверждать, что среди этих учеников найдутся хотя бы два одноклассника?

Решение. Обозначим 11 классов за «клетки», а 14 учеников за «зайцев». Так как «зайцев» больше чем «клеток», то, по принципу Дирихле, найдётся хотя бы одна «клетка», в которой будут находиться как минимум два «зайца», то есть найдётся класс, в котором будет учиться 2 ученика из данного дома. А это означает, что можно утверждать, что среди 14 учеников найдутся хотя бы два одноклассника.

На первый взгляд, непонятно, почему это совершенно очевидное предложение, тем не менее, является мощным математическим методом решения задач, причём самых разнообразных. Всё дело оказывается в том, что в каждой конкретной задаче нелегко понять, что же здесь выступает в роли «зайцев», а что — в роли «клеток». И почему надо, чтобы «зайцев» было больше, чем «клеток». Выбор «зайцев» и «клеток» часто не очевиден. Далеко не всегда по условию задачи можно определить, что следует применить принцип Дирихле и тем более конкретную его формулировку. Главное же достоинство данного метода решения состоит в том, что он даёт неконструктивное решение, то есть мы знаем, что такие клетки есть, но где именно они находятся, часто указать не можем; попытка же дать конструктивное доказательство приводит к большим трудностям.

Рассмотрим следующую задачу.

Задача 1.2. В листке ватмана размером 80×80 сантиметров Петя Иванов шилом проделал 15 дырок. Докажите, что из него можно вырезать лист размером 20×20 сантиметров, не содержащий внутри себя дырок. (Дырки можно считать точечными.)

Решение. Разрежем лист ватмана на 16 листочков размерами 20×20 сантиметров. Так как листочков — «клеток» — 16, а дырок — «зайцев» — 15, то найдётся хотя бы одна «клетка», в которой не будет «зайцев», то есть найдётся лист без дырок внутри.

Для решения данной задачи мы применили следующую формулировку принципа Дирихле: «Если в n клетках сидит m зайцев, причём $n > m$, то хотя бы одна «клетка» будет пустая».

СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	3
Методика проведения школьных и муниципальных олимпиад для учащихся 10–11 классов...	5
Основные методы решения олимпиадных задач	33
Задачи для подготовки к олимпиадам	110
1. Арифметические задачи.....	110
2. Алгебраические задачи	112
3. Геометрические задачи	119
4. Задачи по комбинаторике и теории вероятностей	123
5. Задачи на специальные методы решения	125
Принцип Дирихле	125
Инварианты	126
Логические задачи.....	128
Делимость и признаки делимости.....	132
Уравнения и задачи в целых числах	133
Принцип крайнего.....	135
Задачи на оценку и пример	135
Задачи на графы	135
6. Задачи на разные методы решения	136
Примерные тексты школьных олимпиад	142
10 класс.....	142
11 класс.....	144
Тексты муниципальных олимпиад	147
10 класс.....	147
11 класс.....	150
Решения, ответы	154
Задачи для подготовки к математическим олимпиадам.....	154
Примерные тексты школьных олимпиад	233
10 класс.....	233
11 класс.....	239
Тексты муниципальных олимпиад	245
10 класс.....	245
11 класс.....	255
Список литературы.....	268