

Л. Э. Генденштейн,  
Г. В. Жемчужкина



# УЧИМСЯ РЕШАТЬ ЗАДАЧИ ПО ГЕОМЕТРИИ

9 класс

Подробные решения

Подсказки

Ответы

Москва  
ИЛЕКСА  
2026

УДК 372.851:514  
ББК 22.15:74.202я721  
Г34

**Г34 Генденштейн Л. Э., Жемчужкина Г. В.**

Учимся решать задачи по геометрии. 9 класс. Подробные решения. Подсказки. Ответы / Л. Э. Генденштейн, Г. В. Жемчужкина. — М. : Илекса, 2026. — 184 с. : ил.

ISBN 978-5-89237-778-2

Пособие содержит задачи по геометрии для 9-го класса, дифференцированные по трём уровням сложности. Оно поможет ученикам научиться решать задачи, а учителям предоставит материал, который можно использовать на уроках, для самостоятельных и домашних работ, а также при подготовке к олимпиадам.

Для учителей математики и учащихся 9-го класса.

**УДК 372.851:514**  
**ББК 22.15:74.202я721**

Генденштейн Лев Элевич,  
Жемчужкина Галина Владимировна  
Учимся решать задачи по геометрии. 9 класс.  
Подробные решения. Подсказки. Ответы

Подписано в печать 16.02.2026.  
Формат 60×90/16. Усл. печ. л. 11,24.  
Тираж 2000 экз. Заказ

ООО «Илекса»  
+7(964) 534-80-01  
real-ilexa@yandex.ru  
www.ilexa.ru

ISBN 978-5-89237-778-2

© Генденштейн Л. Э., Жемчужкина Г. В., 2026  
© ИЛЕКСА, 2026  
© Художественное оформление ИЛЕКСА, 2026  
Все права защищены

## СОДЕРЖАНИЕ

Об этом учебном пособии .....	5
<b>1. РЕШЕНИЕ ТРЕУГОЛЬНИКОВ .....</b>	<b>6</b>
Полезные сведения.....	6
Тригонометрические функции угла от $0^\circ$ до $180^\circ$ .....	9
Теорема косинусов .....	14
Теорема синусов.....	22
Решение треугольников .....	29
Площадь треугольника .....	33
<b>2. ХОРДЫ, СЕКУЩИЕ, КАСАТЕЛЬНЫЕ .....</b>	<b>43</b>
Полезные сведения.....	43
Пересекающиеся хорды.....	44
Касательные и секущие.....	48
<b>3. МЕТОД КООРДИНАТ .....</b>	<b>55</b>
Полезные сведения.....	55
Координаты на плоскости.	
Середина и длина отрезка .....	57
Уравнение окружности.....	72
Уравнение прямой.....	82
Уравнение окружности и прямой .....	93
<b>4. ВЕКТОРЫ .....</b>	<b>99</b>
Полезные сведения.....	99
Коллинеарность векторов, сложение и вычитание векторов. Умножение вектора на число.....	101
Координаты вектора .....	107
Скалярное произведение векторов .....	113
<b>5. ПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОУГОЛЬНИКИ.</b>	
<b>ДЛИНА ОКРУЖНОСТИ. ПЛОЩАДЬ КРУГА.....</b>	<b>119</b>
Полезные сведения.....	119
Правильные многоугольники.	
Вписанная и описанная окружности .....	122
Длина окружности и дуги окружности.....	132
Площадь круга и частей круга.....	135

---

<b>6. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ</b> .....	143
Полезные сведения.....	143
Симметрия относительно точки.....	146
Симметрия относительно прямой .....	149
Поворот .....	154
Параллельный перенос .....	159
Преобразование подобия .....	164
Площади подобных фигур .....	165
Гомотетия .....	168
Комбинации геометрических преобразований .....	169
<b>ОТВЕТЫ</b> .....	171

# ОБ ЭТОМ УЧЕБНОМ ПОСОБИИ

## НАЗНАЧЕНИЕ

Данное пособие:



- поможет школьникам научиться решать задачи;
- предложит учителям много полезного материала для самостоятельных и домашних работ, а также при подготовке учеников к олимпиадам.

## СТРУКТУРА

- Задачи дифференцированы по трём уровням сложности.
- К ключевым задачам приведены подробные решения.
- После каждой ключевой задачи даны похожие задачи с подсказками (советами). Ко всем задачам даны ответы.

## ОБОЗНАЧЕНИЯ

Слева от номера задачи:

- значком  обозначены ключевые задачи, к которым после условия приведены подробные решения;
- значком  обозначены задачи, для которых приведены подсказки (советы) внизу страницы.

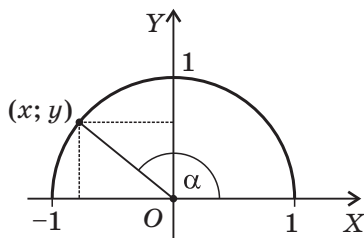
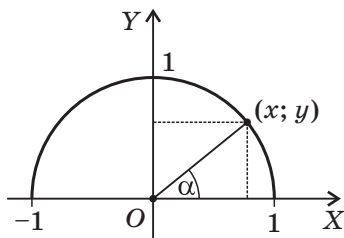
Желаем научиться и научить решать задачи по геометрии!

# 1. РЕШЕНИЕ ТРЕУГОЛЬНИКОВ<sup>1</sup>

## ПОЛЕЗНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Синус, косинус и тангенс угла от  $0^\circ$  до  $180^\circ$

$$\sin \alpha = y; \cos \alpha = x; \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{y}{x}$$



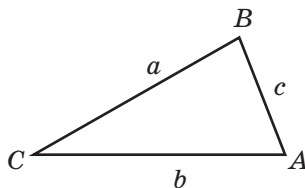
## Тригонометрические тождества

Основное тригонометрическое тождество  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ ;  
 $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$ ;  $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$ ;  $\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$ ;  
 $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$ ;  $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$

## Теорема косинусов

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C;$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

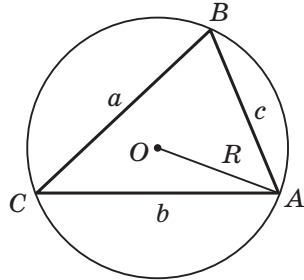


<sup>1</sup> Для нахождения градусной меры углов, отличных от  $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$  и  $90^\circ$ , или значений их тригонометрических функций, используйте калькулятор. В обозначениях принято, что стороны треугольника  $a$ ,  $b$ ,  $c$  лежат против вершин  $A$ ,  $B$ ,  $C$ .

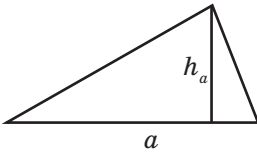
**Теорема синусов**

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R,$$

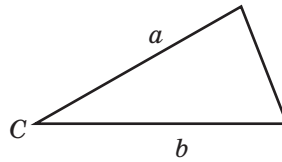
где  $R$  — радиус описанной окружности



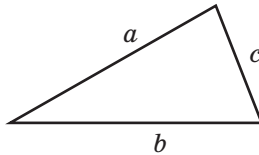
**Площадь треугольника**



$$S = \frac{ah_a}{2}$$

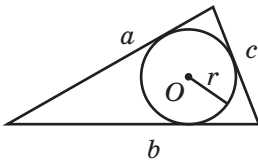


$$S = \frac{absinC}{2}$$

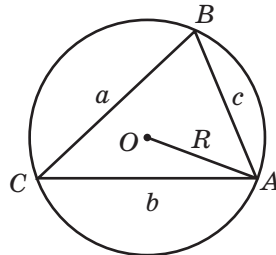


$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

$$p = \frac{a+b+c}{2}$$

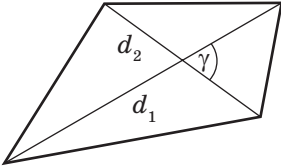
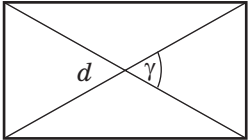
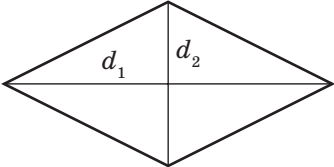


$$S = pr$$



$$S = \frac{abc}{4R}$$

## 1. Решение треугольников

<p><b>Площадь выпуклого четырёхугольника</b></p> $S = \frac{d_1 d_2 \sin \gamma}{2},$ <p><math>d_1</math> и <math>d_2</math> — диагонали, <math>\gamma</math> — угол между ними.</p>	
<p><b>Площадь прямоугольника</b></p> $S = \frac{d^2 \sin \gamma}{2},$ <p><math>d</math> — диагональ, <math>\gamma</math> — угол между диагоналями</p>	
<p><b>Площадь ромба</b></p> $S = \frac{d_1 d_2}{2},$ <p><math>d_1, d_2</math> — диагонали</p>	

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ УГЛА ОТ  $0^\circ$  ДО  $180^\circ$

Первый уровень

- 1.1. Для какого угла  $\alpha$  значение  $\sin \alpha$  наибольшее? Чему равно это значение?
- 1.2. Для какого угла (каких углов)  $\alpha$  значение  $\sin \alpha$  наименьшее? Чему равно это значение?
- 1.3. Для какого угла  $\alpha$  значение  $\cos \alpha$  наибольшее? Чему равно это значение?
- 1.4. Для какого угла  $\alpha$  значение  $\cos \alpha$  наименьшее? Чему равно это значение?
- 1.5. Существует ли угол  $\alpha$ , для которого  $\operatorname{tg} \alpha$  является наибольшим?
- 1.6. Существует ли угол  $\alpha$ , для которого  $\operatorname{tg} \alpha$  является наименьшим?
- 1.7. Как изменяется значение  $\sin \alpha$ , когда  $\alpha$  увеличивается:
  - а) от  $0^\circ$  до  $90^\circ$ ;
  - б) от  $90^\circ$  до  $180^\circ$ ?

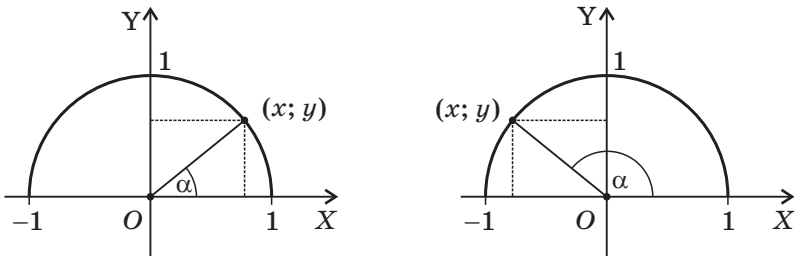


Рис. 1.1

- 1.8. Как изменяется значение  $\cos \alpha$ , когда  $\alpha$  увеличивается:
  - а) от  $0^\circ$  до  $90^\circ$ ;
  - б) от  $90^\circ$  до  $180^\circ$ ?


- 
- 1.7. Воспользуйтесь тем, что на единичной окружности  $\sin \alpha = y$  (рис. 1.1).
  - 1.8. Воспользуйтесь тем, что на единичной окружности  $\cos \alpha = x$  (рис. 1.1).

## 1. Решение треугольников

---

- 1.9. Как изменяется значение  $\operatorname{tg}\alpha$ , когда  $\alpha$  увеличивается:  
а) от  $0^\circ$  до  $89^\circ$ ;  
б) от  $91^\circ$  до  $180^\circ$ ?
- 1.10. Упорядочьте без калькулятора в порядке возрастания:  $\cos 0^\circ$ ,  $\cos 30^\circ$ ,  $\cos 60^\circ$ ,  $\cos 90^\circ$ ,  $\cos 120^\circ$ ,  $\cos 150^\circ$ ,  $\cos 180^\circ$ .
- 1.11. Упорядочьте без калькулятора в порядке возрастания:  $\sin 0^\circ$ ,  $\sin 30^\circ$ ,  $\sin 60^\circ$ ,  $\sin 90^\circ$ .
- 1.12. Упорядочьте без калькулятора в порядке возрастания:  $\sin 90^\circ$ ,  $\sin 120^\circ$ ,  $\sin 150^\circ$ ,  $\sin 180^\circ$ .
- 1.13. Упорядочьте без калькулятора в порядке возрастания:  $\operatorname{tg} 10^\circ$ ,  $\operatorname{tg} 30^\circ$ ,  $\operatorname{tg} 50^\circ$ ,  $\operatorname{tg} 80^\circ$ .
- 1.14. Упорядочьте без калькулятора в порядке возрастания:  $\operatorname{tg} 100^\circ$ ,  $\operatorname{tg} 110^\circ$ ,  $\operatorname{tg} 150^\circ$ ,  $\operatorname{tg} 170^\circ$ .
- 1.15. Упростите выражения:  
а)  $1 - \sin^2 \alpha$ ;  
б)  $\cos^2 \alpha - 1$ ;  
в)  $(1 - \cos \alpha)(1 + \cos \alpha)$ ;  
г)  $(\sin \alpha + 1)(\sin \alpha - 1)$ .


- 
- 1.9. Воспользуйтесь тем, что на единичной окружности  $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{y}{x}$  (рис. 1.1). Обратите внимание: тангенс для углов, больших  $90^\circ$ , отрицательный.
- 1.10. Воспользуйтесь тем, что когда угол увеличивается от  $0^\circ$  до  $180^\circ$ , косинус угла уменьшается.
- 1.11. Воспользуйтесь тем, что когда угол увеличивается от  $0^\circ$  до  $90^\circ$ , синус угла увеличивается.
- 1.12. Воспользуйтесь тем, что когда угол увеличивается от  $90^\circ$  до  $180^\circ$ , синус угла уменьшается.
- 1.13. Воспользуйтесь тем, что когда угол увеличивается от  $0^\circ$  до  $90^\circ$ , тангенс угла увеличивается.
- 1.14. Воспользуйтесь тем, что когда угол увеличивается от  $90^\circ$  до  $180^\circ$ , тангенс угла увеличивается. Обратите внимание: тангенс для углов, больших  $90^\circ$ , отрицательный.
- 1.15. Воспользуйтесь основным тригонометрическим тождеством  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ .

-  **1.16.** Упростите выражения:  
 а)  $\sin(90^\circ - \alpha) + \cos(180^\circ - \alpha)$ ;  
 б)  $\cos(90^\circ - \alpha) - \sin(180^\circ - \alpha)$ .


**1.17.** Упростите выражения:

- а)  $\frac{\cos(90^\circ - \alpha)}{\sin(90^\circ - \alpha)}$ ;  
 б)  $\frac{\cos(90^\circ - \alpha)}{\cos(180^\circ - \alpha)}$ .

**Второй уровень**


-  **1.18.** Дано:  $\cos \alpha = 0,6$ . Найдите  $\alpha$ .

**1.19.** Дано:  $\cos \alpha = -0,6$ . Найдите  $\alpha$ .

-  **1.20.** Дано:  $\sin \alpha = 0,6$ . Чему может равняться  $\alpha$ ?

*Решение.* Для углов  $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$  каждому значению синуса, отличному от 1, соответствуют два угла: острый угол  $\alpha_1$  и тупой угол  $\alpha_2 = 180^\circ - \alpha_1$ . С помощью калькулятора находим острый угол  $\alpha_1 \approx 37^\circ$ , откуда тупой угол  $\alpha_2 \approx 143^\circ$ .

*Ответ.*  $\alpha \approx 37^\circ$  или  $\alpha \approx 143^\circ$ .

-  **1.21.** Дано:  $\cos \alpha = 0,6$ . Найдите  $\sin \alpha$ .

*Решение.* а) Из основного тригонометрического тождества  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$  следует  $\sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$ . Поскольку  $\sin \alpha \geq 0$  для  $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ , получаем  $\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$ . Подставляя данные из условия, находим  $\sin \alpha = 0,8$ .

*Ответ.*  $\sin \alpha = 0,8$ .

**1.22.** Дано:  $\cos \alpha = -0,6$ . Найдите  $\sin \alpha$ .

-  **1.23.** Дано:  $\sin \alpha = 0,6$ . Чему может равняться  $\cos \alpha$ ?

*Решение.* Из основного тригонометрического тождества  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$  следует  $\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$ . Для углов  $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$  значение косинуса может быть как отрицательным (для тупых углов), так и положительным (для острых

---

**1.16.** а) Воспользуйтесь тем, что  $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$ ,  $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$ . б) Воспользуйтесь тем, что  $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$ ,  $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$ .

**1.18.** Воспользуйтесь калькулятором.


## 1. Решение треугольников

---

углов). Поэтому, подставляя данные из условия, находим  $\cos \alpha = 0,8$  или  $\cos \alpha = -0,8$ .


*Ответ.*  $\cos \alpha = 0,8$  или  $\cos \alpha = -0,8$ .

1.24. Дано:  $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$ . Чему может равняться  $\cos \alpha$ ?

 1.25. Дано, что  $\cos \alpha = 0,6$ . Найдите  $\operatorname{tg} \alpha$ .

*Решение.* По определению  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ . Из основного тригонометрического тождества  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$  следует  $\sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$ . Учитывая, что  $\sin \alpha \geq 0$  для углов  $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ , находим  $\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = 0,8$ . Итак,  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{0,8}{0,6} = \frac{4}{3}$ .

*Ответ.*  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{3}$ .

 1.26. Дано:  $\cos \alpha = -0,6$ . Найдите  $\operatorname{tg} \alpha$ .

 1.27. Чему может равняться  $\operatorname{tg} \alpha$ , если  $\sin \alpha = 0,6$ ?

*Решение.* По определению  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ . Из основного тригонометрического тождества  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$  следует  $\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$ . Для углов  $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$  значение косинуса может быть как отрицательным (для тупых углов), так и положительным (для острых углов). Поэтому, подставляя данные из условия, получаем  $\cos \alpha = 0,8$  или  $\cos \alpha = -0,8$ .

Подставляя снова данные из условия, находим:  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}$  или

$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{3}{4}$ .

*Ответ.*  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}$  или  $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{3}{4}$ .

---

1.26. Примите во внимание, что  $\cos \alpha$  и  $\operatorname{tg} \alpha$  имеют одинаковые знаки.

- 1.28.** Чему может равняться  $\operatorname{tg}\alpha$ , если  $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ?
- 1.29.** Докажите тождества:  
 а)  $\cos^2\alpha(1 + \operatorname{tg}^2\alpha) = 1$ ;  
 б)  $\sin^2\alpha(1 + \operatorname{tg}^2\alpha) = \operatorname{tg}^2\alpha$ .
- 1.30.** Дано:  $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{3}{4}$ . Чему равны:  
 а)  $\cos\alpha$ ;  
 б)  $\sin\alpha$ ?
- 1.31.** Чему равна сумма косинусов всех углов:  
 а) квадрата;  
 б) ромба;  
 в) параллелограмма;  
 г) трапеции?
- 1.32.** Синус одного из углов равносторонней трапеции равен  $0,3$ . Чему равна сумма синусов всех углов трапеции?
- 1.33.** Косинус одного из углов равнобедренного треугольника равен  $0,5$ . Чему равна сумма синусов всех углов треугольника?
- 1.34.** Косинус одного из углов равнобедренного треугольника равен  $-0,5$ . Чему равна сумма синусов всех углов треу-

**1.28.** Рассмотрите все возможности.

**1.29.** Воспользуйтесь основным тригонометрическим тождеством и определением тангенса.

**1.30.** а) Докажите, что  $\cos^2\alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}$  и примите во внимание, что  $\cos\alpha$  и  $\operatorname{tg}\alpha$  имеют одинаковые знаки. б) Докажите, что  $\sin^2\alpha = \frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}$ .

**1.31.** б–г) Воспользуйтесь тем, что  $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$ .




**1.32.** Воспользуйтесь свойством равнобедренной трапеции, а также тем, что  $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$ .

**1.33.** Докажите, что данный треугольник является равносторонним.


## 1. Решение треугольников

---

гольника?


-  **1.35.** Два вписанных угла опираются на одну хорду, длина которой равна радиусу окружности. Чему может равняться сумма косинусов этих углов?
- 1.36.** Два вписанных угла опираются на одну хорду, длина которой равна радиусу окружности. Чему равна сумма синусов этих углов?
-  **1.37.** Сумма синусов острых углов прямоугольного треугольника равна 1,4. Чему равна сумма косинусов этих углов?
-  **1.38.** Чему равна сумма квадратов синусов острых углов прямоугольного треугольника?

Третий уровень

-  **1.39.** Синус одного из углов равнобедренного треугольника равен  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ . Чему может равняться сумма косинусов всех углов треугольника?

### ТЕОРЕМА КОСИНУСОВ

Первый уровень

-  **1.40.** О сторонах и углах треугольника известно, что  $a = 3$ ,  $b = 5$ ,  $\angle C = 60^\circ$ . Найдите  $c$ .

*Решение.* Согласно теореме косинусов  $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$ . Подставляя данные из условия, получаем  $c^2 = 19$ , откуда  $c = \sqrt{19}$ .

---

- 1.34.** Примите во внимание, что в равнобедренном треугольнике тупым может быть только угол против основания.
- 1.35.** Воспользуйтесь свойством вписанных углов. Примите во внимание, что данные углы могут опираться как на одну дугу, так и на разные дуги.
- 1.37.** Воспользуйтесь тем, что  $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$ ,  $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$ .
- 1.38.** Воспользуйтесь свойством острых углов прямоугольного треугольника и основным тригонометрическим тождеством.
- 1.39.** Найдите углы треугольника. Рассмотрите все возможные варианты.

*Ответ.*  $c = \sqrt{19}$ .

- 1.41.** О сторонах и углах треугольника известно, что  $a = 3$ ,  $b = 5$ ,  $\angle C = 120^\circ$ . Найдите  $c$ .

**Второй уровень**

- 1.42.** Стороны треугольника  $a = 6$ ,  $b = 8$ ,  $c = 10$ .  
 а) Найдите косинусы углов треугольника.  
 б) Найдите углы треугольника.

*Решение.* а) Согласно теореме косинусов  $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$ . Отсюда  $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$ . Аналогично находим

косинусы остальных углов треугольника. Подставляя данные из условия, получаем  $\cos C = 0$ ;  $\cos A = 0,8$ ;  $\cos B = 0,6$ .

б) Зная косинусы углов, находим без калькулятора  $\angle C = 90^\circ$ , остальные углы находим с помощью калькулятора:  $\angle A \approx 37^\circ$ ,  $\angle B \approx 53^\circ$ .

*Ответ.* а)  $\cos C = 0$ ;  $\cos A = 0,8$ ;  $\cos B = 0,6$ . б)  $\angle C = 90^\circ$ ,  $\angle A \approx 37^\circ$ ,  $\angle B \approx 53^\circ$ .

- 1.43.** Стороны треугольника  $a = 5$ ,  $b = 12$ ,  $c = 13$ . Найдите углы треугольника.

- 1.44.** Стороны параллелограмма равны  $a$  и  $b$ , а угол  $C$  между ними равен  $60^\circ$ . Чему равны:  
 а) меньшая диагональ параллелограмма  $d_1$ ;  
 б) бóльшая диагональ параллелограмма  $d_2$ ;  
 в) площадь параллелограмма  $S$ ?

*Решение.* а) Стороны параллелограмма  $a$  и  $b$  и его меньшая диагональ  $d_1$  образуют треугольник, в котором против стороны  $d_1$  лежит  $\angle C = 60^\circ$ . Используя теорему косинусов

и значение косинуса угла  $60^\circ$ , получаем  $d_1 = \sqrt{a^2 + b^2 - ab}$ .

б) Стороны параллелограмма  $a$ ,  $b$  и его бóльшая диагональ  $d_2$  образуют тупоугольный треугольник, в котором против стороны  $d_2$  лежит угол  $120^\circ$ . Используя теорему косинусов

**1.41.** Воспользуйтесь теоремой косинусов.

**1.43.** Воспользуйтесь теоремой косинусов.

## 1. Решение треугольников

---

и значение косинуса угла  $120^\circ$ , получаем  $d_2 = \sqrt{a^2 + b^2 + ab}$ .

в) Площадь параллелограмма  $S = ah_a$ , где  $h_a = b \sin C$  — высота параллелограмма, проведённая к стороне  $a$ . Итак,

$$S = ab \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

**Ответ.** а)  $d_1 = \sqrt{a^2 + b^2 - ab}$ ; б)  $d_2 = \sqrt{a^2 + b^2 + ab}$ ; в)  $S = ab \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

**1.45.** Докажите, что сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон.

**Решение.** Если данный параллелограмм — прямоугольник, это следует из теоремы Пифагора. Если данный параллелограмм не прямоугольник, обозначим стороны параллелограмма  $a$ ,  $b$ , меньшую диагональ  $d_1$ , большую —  $d_2$ , а острый угол параллелограмма  $\alpha$ . Тогда согласно теореме косинусов  $d_1^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha$ ,  $d_2^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(180^\circ - \alpha)$ . Поскольку  $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$ , получаем  $d_2^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha$ . Следовательно,  $d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$ .

**1.46.** Стороны параллелограмма равны  $a$  и  $b$ , а одна из диагоналей равна  $d_1$ . Чему равна другая диагональ  $d_2$ ?

**1.47.** Диагонали параллелограмма равны  $d_1$  и  $d_2$ , а одна из сторон равна  $a$ . Чему равна другая сторона  $b$ ?

**1.48.** Стороны параллелограмма равны 3 и 5, а одна из диагоналей равна 7. Чему равны:

а) углы параллелограмма;

б) другая диагональ параллелограмма?

**1.49.** Про стороны и углы треугольника известно:  $a - b = 8$ ,  $c = 13$ ,  $\angle C = 60^\circ$ . Чему равны  $a$  и  $b$ ?

---

**1.46.** Воспользуйтесь тем, что сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон.

**1.47.** Воспользуйтесь тем, что сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон.

**1.48.** а) Воспользуйтесь теоремой косинусов. б) Воспользуйтесь тем, что сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон.

**1.49.** Выразите  $a$  через  $b$  и воспользуйтесь теоремой косинусов.

**1.50.** Про стороны и углы треугольника известно:  $a + b = 8$ ,  $c = 7$ ,  $\angle C = 120^\circ$ . Чему могут равняться  $a$  и  $b$ ?

**1.51.** Про стороны и углы треугольника известно:  $a + b = 13$ ,  $c = 7$ ,  $\angle C = 60^\circ$ . Найдите  $|a - b|$ .

**1.52.** Про стороны и углы треугольника известно, что  $a : b = 3 : 5$ ,  $c = a + b - 3$ ,  $\angle C = 120^\circ$ . Чему равны стороны треугольника?

*Решение.* В данном случае согласно теореме косинусов  $(a + b - 3)^2 = a^2 + b^2 + ab$ . Кроме того, согласно условию  $a : b = 3 : 5$ . Два положительных решения этой системы уравнений:  $a = 0,6$ ;  $b = 1$  и  $a = 9$ ;  $b = 15$ . Этим решениям соответствуют  $c = -1,4$  и  $c = 21$ . Условию удовлетворяет только второе решение, поскольку  $c$  — длина стороны и поэтому должно быть положительным. Итак,  $a = 9$ ;  $b = 15$ ;  $c = 21$ .

*Ответ.*  $a = 9$ ;  $b = 15$ ;  $c = 21$ .

**1.53.** Выразите медиану  $m_a$  треугольника, проведённую к стороне  $a$ , через стороны треугольника  $a$ ,  $b$ ,  $c$ .

*Решение.* Выполнив удвоение медианы  $m_a$ , получим параллелограмм со сторонами  $b$ ,  $c$  и диагоналями  $a$ ,  $2m_a$ . Поскольку сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон, получаем:  $a^2 + (2m_a)^2 = 2b^2 + 2c^2$ .

$$\text{Отсюда } m_a = \frac{\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}}{2}.$$

$$\text{Ответ. } m_a = \frac{\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}}{2}.$$

**1.54.** Выразите медианы  $m_b$  и  $m_c$  треугольника, проведённые, соответственно, к сторонам  $b$  и  $c$ , через стороны треугольника  $a$ ,  $b$ ,  $c$ .

**1.55.** Стороны треугольника  $a = 2$ ,  $b = 3$ ,  $c = 4$ . Найдите медианы треугольника.

**1.56.** Стороны треугольника  $a = 5$ ,  $b = 8$ , а проведённая к стороне  $c$  медиана  $m_c = 6$ . Найдите  $c$ .

**1.51.** Сначала найдите  $a$  и  $b$  с помощью теоремы косинусов.

**1.56.** Воспользуйтесь удвоением медианы, а также тем, что сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон.

## ОТВЕТЫ

### 1. Решение треугольников

- 1.1.** Для  $\alpha = 90^\circ$ ;  $\sin 90^\circ = 1$ . **1.2.** Для  $\alpha = 0^\circ$  и для  $\alpha = 180^\circ$ ;  $\sin 0^\circ = \sin 180^\circ = 0$ . **1.3.** Для  $\alpha = 0^\circ$ ;  $\cos 0^\circ = 1$ . **1.4.** Для  $\alpha = 180^\circ$ ;  $\cos 180^\circ = -1$ . **1.5.** Такого угла нет, поскольку тангенс угла неограниченно увеличивается, когда угол возрастает, приближаясь к  $90^\circ$ . **1.6.** Такого угла нет, поскольку тангенс угла отрицательный для углов от  $90^\circ$  до  $180^\circ$  и неограниченно увеличивается по модулю, когда угол уменьшается, приближаясь к  $90^\circ$ . **1.7.** а) Увеличивается. б) Уменьшается. **1.8.** а) Уменьшается. б) Уменьшается. **1.9.** а) Увеличивается. б) Увеличивается. **1.10.**  $\cos 180^\circ$ ,  $\cos 150^\circ$ ,  $\cos 120^\circ$ ,  $\cos 90^\circ$ ,  $\cos 60^\circ$ ,  $\cos 30^\circ$ ,  $\cos 0^\circ$ . **1.11.**  $\sin 0^\circ$ ,  $\sin 30^\circ$ ,  $\sin 60^\circ$ ,  $\sin 90^\circ$ . **1.12.**  $\sin 180^\circ$ ,  $\sin 150^\circ$ ,  $\sin 120^\circ$ ,  $\sin 90^\circ$ . **1.13.**  $\operatorname{tg} 10^\circ$ ,  $\operatorname{tg} 30^\circ$ ,  $\operatorname{tg} 50^\circ$ ,  $\operatorname{tg} 80^\circ$ . **1.14.**  $\operatorname{tg} 100^\circ$ ,  $\operatorname{tg} 110^\circ$ ,  $\operatorname{tg} 150^\circ$ ,  $\operatorname{tg} 170^\circ$ . **1.15.** а)  $\cos^2 \alpha$ . б)  $-\sin^2 \alpha$ . в)  $\sin^2 \alpha$ . г)  $-\cos^2 \alpha$ . **1.16.** а) 0. б) 0. **1.17.** а)  $\operatorname{tg} \alpha$ . б)  $-\operatorname{tg} \alpha$ . **1.18.**  $\alpha \approx 53^\circ$ . **1.19.**  $\alpha \approx 127^\circ$ . Обратите внимание: если косинус угла отрицательный, угол тупой. **1.24.**  $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$  или  $\cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ . **1.26.**  $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{4}{3}$ . **1.28.**  $\operatorname{tg} \alpha = 1$  или  $\operatorname{tg} \alpha = -1$ . **1.30.** а)  $\cos \alpha = -0,8$ . б)  $\sin \alpha = 0,6$ . **1.31.** а-г) 0. **1.32.** 1,2. **1.33.**  $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ . **1.34.**  $1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$ . **1.35.**  $\sqrt{3}$  или 0 или  $-\sqrt{3}$ . **1.36.** 1. **1.37.** 1,4. **1.38.** 1. **1.39.**  $\frac{3}{2}$  или  $\sqrt{3} - \frac{1}{2}$ . **1.41.**  $c = 7$ . **1.43.**  $\angle C = 90^\circ$ ,  $\angle A \approx 23^\circ$ ,  $\angle B \approx 67^\circ$ . **1.46.**  $d_2 = \sqrt{2a^2 + 2b^2 - d_1^2}$ . **1.47.**  $b = \sqrt{\frac{d_1^2 + d_2^2 - 2a^2}{2}}$ . **1.48.** а)  $60^\circ$  и  $120^\circ$ . б)  $\sqrt{19}$ . **1.49.**  $a = 15$ ,  $b = 7$ . **1.50.**  $a = 5$ ,  $b = 3$  или  $a = 3$ ,  $b = 5$ . **1.51.**  $|a - b| = 3$ . **1.54.**  $m_b = \frac{\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}}{2}$ ,  $m_c = \frac{\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}}{2}$ .